

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

24. Band, Heft 6

8. August 1941

S. 241—288

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Koopman, B. O.:** Intuitive probabilities and sequences. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 169—187 (1941).

Vorliegende Abhandlung bildet den 2. Teil von "The axioms and algebra of intuitive probability" [*Ann. of Math.*, II. s. 41, 269—292 (1940); dies. Zbl. 24, 50] und stellt den Zusammenhang zwischen dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff und der statistischen Wahrscheinlichkeit, wie sie in der Naturwissenschaft gebraucht wird, her. Es wird gezeigt, daß die Anwendung der wie üblich definierten statistischen Wahrscheinlichkeit den intuitiven Begriff der Wahrscheinlichkeit, wie er in der oben genannten Arbeit eingeführt wurde, voraussetzt, daß aber auch keine weiteren Ideen irgendwelcher Art erforderlich sind.

*Ackermann* (Burgsteinfurt).

**McKinsey, J. C. C.:** Proof that there are infinitely many modalities in Lewis's system  $S_2$ . *J. Symbolic Logic* 5, 110—112 (1940).

In dieser Arbeit wird eine unendliche Matrix angegeben, deren Erfüllungsmenge die Menge der Sätze des Lewisschen (Lewis-Langford, *Symbolic Logic*. 1932, 492 bis 502) Kalküls  $S_2$  enthält. Mit Hilfe dieser Matrix wird dann gezeigt, daß ein Ausdruck der Form  $\alpha p = \beta p$ , wo  $\alpha$  und  $\beta$  endliche Folgen von  $\sim$ -,  $\Diamond$ -Zeichen sind, nur dann beweisbar ist, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die gleiche Zahl von  $\Diamond$ -Zeichen enthalten. Hieraus folgt dann, daß es in  $S_2$  unendlich viele irreduzible Modalitäten gibt; z. B.  $\Diamond p, \Diamond \Diamond p, \dots$ . Offen bleibt die Frage, ob aus der Beweisbarkeit von  $\alpha p = \beta p$  in  $S_2$ , wo  $\alpha, \beta$  wie oben bestimmt sind,  $\alpha = \beta$  folgt.

*Schröter* (Berlin).

**Péter, Rózsa:** Die Schranken der axiomatischen Methode. *Mat. fiz. Lap.* 48, 120—141 u. dtsh. Zusammenfassung 141—143 (1941) [Ungarisch].

Es werden diejenigen Ergebnisse der Grundlagenforschung zusammengestellt, die zeigen, daß die logisch-axiomatische Methode gewissen Schranken unterworfen ist, insofern eine restlose Formalisierung aller uns zur Verfügung stehenden Beweismittel in einem System nicht gelingt. Im einzelnen werden erwähnt: 1) der Satz von Skolem, daß es zu einem jeden widerspruchsfreien Axiomensystem, insbesondere einem solchen der Mengenlehre, ein abzählbares Modell gibt, das ihm genügt; 2) das Ergebnis von Skolem, daß einem beliebigen Axiomensystem für die natürliche Zahlenreihe immer auch Modelle genügen, die einen höheren Ordnungstyp als  $\omega$  haben; 3) das Ergebnis von Gödel, daß es für jedes formale Axiomensystem der Arithmetik Sätze gibt, die zwar richtig sind und mit den Mitteln des Axiomensystems formuliert werden können, aber in dem System unentscheidbar sind; 4) der Satz von Church über die Unmöglichkeit einer allgemeinen Lösung des logischen Entscheidungsproblems.

*Ackermann.*

**Kalmár, László:** Zielsetzungen, Methoden und Ergebnisse der Hilbertschen Beweistheorie. *Mat. fiz. Lap.* 48, 65—116 u. dtsh. Zusammenfassung 116—119 (1941) [Ungarisch].

Für die Hilbertsche Beweistheorie wird ein zusammenfassender Überblick hinsichtlich ihrer Entstehungsgründe, Ziele und Methoden gegeben. Nach einer Schilderung der Grundlagenkrise und einem Überblick über die axiomatische Methode im allgemeinen und die mathematische Logik wird die älteste Methode der Widerspruchsfreiheitsbeweise (Konstruieren eines Modells, d. h. Zurückführung der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems auf die eines anderen) an den bekannten klassischen Anwendungen (Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie usw.) besprochen. Es folgt die Darstellung der Hilbertschen Beweistheorie im eigentlichen Sinne, die den absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis zum Ziel hat. Von den hierhin gehörenden



Methoden wird zunächst die auf J. König zurückgehende Wertungsmethode besprochen, die dann in erweiterter Form, als sog. Teilwertungsmethode, von Hilbert, Ackermann, v. Neumann und Herbrand benutzt wurde, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik unter gewissen Einschränkungen hinsichtlich der Verwendung der vollständigen Induktion zu zeigen. Es folgt weiter eine Darlegung der Methode der Beweistransformation, mit Hilfe derer es Gentzen zuerst gelungen ist, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ohne irgendwelche Einschränkungen zu zeigen. Daß auch die ältere Teilwertungsmethode den vollen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Arithmetik ermöglicht, wie Ref. neuerdings gezeigt hat, wird ebenfalls erwähnt. Zum Schluß wird eine kurze Gegenüberstellung von Hilbertscher Beweistheorie und Intuitionismus gegeben. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

## Geschichtliches.

● **Kluge, Theodor: Die Zahlenbegriffe der Dravida, der Hamiten, der Semiten und der Kaukasier, ein vierter Beitrag zur Geistesgeschichte des Menschen.** Berlin-Steglitz: Selbstverl. 1941. 65 Bl. u 5 Abb.

Mit der vorliegenden Arbeit setzt der Verf. seine drei früheren Untersuchungen (siehe dies. Zbl. 22, 97; 23, 385) fort. Behandelt werden nach einem Nachtrag zum Alt-türkischen die Zahlenbegriffe der Dravida, Hamiten, Semiten und Kaukasier. Daß diesmal der Verf. mit 65 Seiten auskommt, hat seinen Grund einmal darin, daß er sich zwei Probleme (die Null sowie die Erweiterung der Zahlenreihe von 8 auf 10) auf den Schluß der Arbeit aufgespart hat, und daß er sich bei den schon erschöpfend studierten semitischen Zahlenbegriffen kurz fassen kann. *Vogel* (München).

**Conte, Luigi: Il cosidetto XIV Libro degli elementi.** Period. Mat., IV. s. 21, 113—127 (1941).

Die als XIV. Buch der Elemente gezählte Schrift des Hypsikles über die regulären Körper wird in Übersetzung gegeben; da eine solche auf Grund des Heibergschen Textes sonst nicht vorliegt, eine nützliche Arbeit, die sorgfältig ausgeführt ist. In der kurzen Einleitung sind die Ausdrücke für die Kanten und sonstigen charakteristischen Größen der 5 Körper tabellarisch zusammengestellt. *Thaer* (Detmold).

**Cassina, Ugo: Sulle equazioni cubiche di Al Biruni.** Period. Mat., IV. s. 21, 3—20 (1941).

Schon 200 Jahre vor Leonardo von Pisa, bei dem wohl die erste numerische, nicht auf die Winkeldreiteilung zurückzuführende Lösung einer kubischen Gleichung ( $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ) vorliegt, treten bei Al-Biruni die beiden Gleichungen  $x^3 = 3x + 1$  und  $x^3 + 1 = 3x$  im Zusammenhang mit der Konstruktion des regulären 9- und 18-Ecks auf. — In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit der Al-Birunischen Geometrie im allgemeinen und mit den einschlägigen Stellen im besonderen, die nach der Ausgabe von Schoy (C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abû'l Raihân Muh. ibn Ahmad Al-Biruni, ed. J. Ruska und H. Wieleitner, Hannover 1927) wörtlich übersetzt und mit Kommentar versehen, wiedergegeben werden. *Vogel* (München).

**Cassina, Ugo: La trisezione dell'angolo in Al Biruni.** Period. Mat., IV. s. 21, 77—87 (1941).

Fortsetzung des vorstehend besprochenen Aufsatzes. Verf. übersetzt Stücke aus C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abû'l Raihân Muhammad ibn Ahmad Al-Birûnî (Hannover 1927), verbessert dabei eine Anzahl von Versen in der ja nach dem Tode von Schoy erschienenen Arbeit, und gibt einen kurzen Kommentar. Die Gleichung für die Sehne des gedrittelten Winkels gibt Al Biruni als Beziehung zwischen Flächen; er benutzt sie zur Verifikation von Werten für  $\text{chord } 1^\circ$ , gibt aber kein algebraisches Näherungsverfahren, sondern wendet zur Berechnung das Verfahren des Ptolemaeus in feinerer Ausführung an. *Thaer* (Detmold).



● **Bacon, Roger: Opera haectenus inedita Rogeri Baconi. Fasc. 16: Communi mathematica Fratrís Rogeri. Pt. 1 a. 2. Nunc primum edit. Robert Steele. Oxford: Clarendon press a. London: Oxford univ. press 1940. XIII, 162 pag. 15/-.**

● **Kepler, Johannes: Gesammelte Werke. Bd. 6. Harmonice Mundi. Hrsg. v. Max Caspar. Unter d. Leitung v. Walther von Dyck † u. Max Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandl. 1940. 563 S. RM. 15.—.**

Der vorliegende Band der Neuausgabe von Keplers Werken enthält außer dem Urtext der *Harmonice mundi* die gegen den englischen Theosophen Robert Fludd gerichtete *Apologia* und einen ausführlichen Nachbericht des Herausgebers. Dieser umfaßt die Entstehungsgeschichte des Werkes, das Verzeichnis der einschlägigen Stellen aus Keplers Nachlaß und Briefwechsel und ausführliche Anmerkungen, die bis auf wenige Stellen aus den Anmerkungen zu der vom Herausgeber kürzlich veröffentlichten Übersetzung der *Harmonice mundi* übernommen sind. *Krafft* (Marburg a. L.).

**Candido, Giacomo: Le risoluzioni della equazione di quarto grado. Period. Mat., IV. s. 21, 21—44 (1941).**

Ein Stolz der italienischen Algebraiker ist die Auflösung der Gleichung dritten Grades (Scipione dal Ferro, Nicolo Tartaglia), der Gleichung vierten Grades (Ludovico Ferrari) und der Nachweis der Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften und höheren Grades (Paolo Ruffini). In diesem Aufsatz nebst zwei Fortsetzungen, die angekündigt werden, will der Verf. in erster Linie die Leistungen der italienischen Mathematiker bei der Behandlung der Gleichungen vierten Grades darstellen. Er führt eine Reihe von 33 benützten Schriften an. Sodann wird in diesem Aufsatz zunächst das Verfahren von Ferrari dargestellt, dann ein Vorblick auf das Lösungsverfahren von Lagrange gegeben, weiter folgen dann Lösungsverfahren von Descartes, van Schooten und de Martino. Wie der Verf. angibt, kommt er in manchen Punkten zu Schlüssen, die mit der bisherigen Überlieferung im Widerspruch stehen. *L. Schrutka.*

**Candido, Giacomo: Le risoluzioni della equazione di quarto grado. Ferrari-Eulero-Lagrange. Period. Mat., IV. s. 21, 88—106 (1941).**

Fortsetzung eines kritischen Vergleichs der bekanntesten Lösungsmethoden der Gleichungen 4. Grades (vgl. vorstehendes Referat). Hier wird zunächst die Meinung geäußert, daß die Eulersche Lösungsmethode mehr eine sinnreiche Umwandlung der Methode von L. Ferrari sei als eine Verallgemeinerung derjenigen von Hudde. Die Behauptung wird mit einer besonderen Darstellung der Ferraris Methode begründet. Die größere praktische Einfachheit der Methode von L. Ferrari derjenigen von Euler gegenüber wird an drei numerischen Beispielen gezeigt. Es folgt eine einheitliche Zusammenfassung der beiden Methoden. Die Methode von L. Ferrari ist auch einfacher anzuwenden als diejenige von Lagrange, wie hier durch theoretische Gründe und an zwei numerischen Beispielen gezeigt wird. Schließlich noch einige vergleichende Betrachtungen über Methoden, die als „Vereinfachungen“ klassischer Methoden bezeichnet werden. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Schimank, Hans: Die Kunst-Rechnungs-liebende Societät als Gründung deutscher Schreib- und Rechenmeister. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Tl 3, 22—45 (1941).**

Die derzeitige Mathematische Gesellschaft in Hamburg ist hervorgegangen aus der am 3. III. 1690 begründeten Kunst-Rechnungs-liebenden Societät; ihre Gründer sind Hinrich Meißner (1644—1716) und Valentin Heins (1637—1704), die als Lehrer an Hamburger Kirchenschulen wirkten und diese erste mathematische Gesellschaft, die vornehmlich aus Rechenmeistern bestand, ins Leben riefen, um die Kunst des Rechnens fortzupflanzen, wissenschaftlichen Verkehr zwischen den Mitgliedern zu pflegen und die Herausgabe mathematischer Werke zu fördern. Eine Reihe von Rechenbüchern sowie eine Schrift des Mitgliedes J. J. Zimmermann aus den Gründungsjahren zeugen von der Aktivität der Societät. Leibniz interessierte sich gleich für die Neugründung und wies Meißner in mehreren Briefen auf Probleme aus der Reihenlehre und Algebra hin, die der Bearbeitung durch die Societät wert seien; allerdings scheiterten seine Absichten an der Unfähigkeit der Mitglieder. Im ganzen möchte Verf. die Gründung der Societät, wie auch den Charakter ihrer Schriften aus der Weltauffassung des Barock verstanden wissen. *Harald Geppert* (Berlin).



**Jelitai, József:** Entwurf eines Pachtvertrages zwischen Bolyai Vater und Sohn. Mat. természett. Értes. 59, 842—844 u. dtsh. Zusammenfassung 845 (1940) [Ungarisch].

Text eines ohne Datum und Unterschriften abgefaßten Pachtvertrages über ein Gut in Maldorf bei Elisabethstadt zwischen Wolfgang Bolyai und seinem Sohn Johann. Der wesentliche Teil des jährlichen Pachtzinses sollte in einer bedeutenden mathematischen Abhandlung, die der Ungarischen Akademie vorzulegen wäre, bestehen. *Harald Geppert* (Berlin).

**König, Dénes:** Les premières cinquante années de la société de mathématiques et de physique de Budapest. Mat. fiz. Lap. 48, 7—32 u. franz. Zusammenfassung 32—33 (1941) [Ungarisch].

**Gontcharoff, V., et A. Kolmogoroff:** Le soixantenaire de S. Bernstein. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 249—260 (1940) [Russisch].

Biographie mit vollständigem Schriftenverzeichnis. *Geppert* (Berlin).

**Delaunay, B. I.: Dmitry Alexandrowitsch Gravé 1863—1939.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 349—356 (1940) [Russisch].

Biographie und vollständiges Schriftenverzeichnis. *Geppert* (Berlin).

**Kusmin, R. O.: Iwan Iwanowitsch Iwanow 1862—1939.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 357—362 (1940) [Russisch].

Biographie und Schriftenverzeichnis. *Geppert* (Berlin).

**Carathéodory, Constantin:** Ferdinand von Lindemann. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1940, 61—63 (H. 1).

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome:

● **Crosland, L.: Upper school algebra.** Being an abridged and revised edition of Hall and Knight's „Higher Algebra“. London: Macmillan & Co., Ltd. 1940. XV, 292 pag. 6/-.

● **Ming, Nai-Ta:** Indexmethode zur Entwicklung der Determinanten für höhere Ordnung und zur Berechnung der inversen Matrix (mit einer Tabelle von 1. bis 6. Ordnung der Determinanten). Borna b. Leipzig: Robert Noske 1939. 28 S.

Verf. stellt eine Regel auf, um eine Determinante  $n$ -ter Ordnung zu entwickeln, nachdem zwei ihrer Minoren ( $n - 1$ )-ter Ordnung entwickelt worden sind. Die Entwicklung der übrigen Minoren ist durch Vertauschung der Indizes zu bekommen.

*Kyrille Popoff* (Sofia).

**Carlitz, L.: An analogue of the Staudt-Clausen theorem.** Duke Math. J. 7, 62—67 (1940).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 17, 195) hat der Autor die rationalen Funktionen  $B_m$  definiert, die im Bereich der Polynome mit Koeffizienten aus  $GF(p^n)$  das Analogon der Bernoullischen Zahlen bilden, und die Ganzheit dieser Funktionen untersucht. Das Hauptergebnis wird jetzt in vereinfachter, aber äquivalenter Formulierung einfacher bewiesen. Unter der Voraussetzung  $m \equiv 0 \pmod{p^n - 1}$  heißt das Hauptergebnis: Es sei  $m = \sum \beta_h p^h$  ( $0 \leq \beta_h < p$ ) und  $p^n \neq 2$ . Wenn es nun eine ganze Zahl  $k$  gibt mit den Eigenschaften  $nk(p - 1) = \sum \beta_h$ ,  $p^{nk} - 1/m$ , so hat  $B_m$  die Form  $B_m = G_m - e \sum P^{-1}$ , wo  $G_m$  ganz,  $e$  eine Konstante  $\neq 0$  ist und die Summation sich über alle irreduziblen  $P$  vom Grade  $k$  erstreckt. Gibt es kein solches  $k$ , so ist  $B_m$  ganz. Bei gegebenem  $k$  gibt es unendlich viele  $B_m$  der Gestalt  $G_m + \sum_{\text{Grad } P = k} P^{-1}$ . *van der Waerden* (Leipzig).

### Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

**Kawada, Yukiyo:** Über die homomorphe Darstellung der Verbände und der multiplikativen Systeme. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 537—542 (1940).

$m, m'$  seien multiplikative Systeme. Ein  $m$ -Homomorphismus von  $m$  auf  $m'$  ist



eine Zuordnung  $a \rightarrow f(a)$  von  $m$  auf  $m'$  mit  $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$  ( $\cap$  ist die Multiplikation). Besteht  $m'$  nur aus 0 und 1, so heißt der Homomorphismus irreduzibel. Die Gesamtheit aller Ideale von  $m$  bildet einen distributiven Verband, der ein zu  $m$  isomorphes multiplikatives System enthält, das System aller Hauptideale. Eine isomorphe Darstellung von  $m$  als multiplikatives Mengensystem erhält man so:  $\Omega$  sei die Menge aller irreduziblen Homomorphismen  $f$ . Jedem  $a \in m$  werde die Menge  $A$  aller  $f$  mit  $f(a) = 1$  zugeordnet. — Mit Hilfe der Idealtheorie von A. H. Clifford [Ann. Math. Princeton, II. s. 39, 459—610 (1938); dies. Zbl. 19, 194] in dem als Halbgruppe aufgefaßten  $m$  wird die kanonische (engste) Erweiterung von  $m$  zu einem distributiven Verband bestimmt: Zwei Homomorphismen  $f_1, f_2$  von  $m$  auf sich heißen äquivalent, wenn aus  $f_1(a) = f_1(b)$  stets  $f_2(a) = f_2(b)$  folgt und umgekehrt. Die Äquivalenzklassen bilden einen Verband  $f(m)$ , und die Projektionen (das sind die Homomorphismen  $x \rightarrow x \cap a$ ,  $a$  fest) bilden ein zu  $m$  isomorphes Teilsystem  $\tilde{m}$ . Der durch  $\tilde{m}$  erzeugte Teilverband von  $f(m)$  ist die gesuchte kanonische Erweiterung. *G. Köthe.*

**Whitman, Philip M.: Free lattices.** Ann. of Math., II. s. 42, 325—330 (1941).

Der aus den Elementen  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  erzeugte freie Verband  $\mathfrak{B}$  enthält die Elemente: 1)  $x_i$ , 2) mit  $a_i (i = 1, \dots, n)$  auch  $\bigcup_{i=1}^n a_i$  und  $\bigcap_{i=1}^n a_i$ , zwischen denen eine Relation  $\subset$  definiert ist durch: a)  $x_i \subset x_j$ , wenn  $i = j$ , b)  $\bigcup_i a_i \subset b$ , wenn  $a_i \subset b$  für alle  $i$ , c)  $a \subset \bigcap_j b_j$ , wenn  $a \subset b_j$  für alle  $j$ , d)  $\bigcap_i a_i \subset \bigcup_j b_j$ , wenn es ein  $i$  gibt mit  $a_i \subset \bigcup_j b_j$ , oder wenn es ein  $j$  gibt mit  $\bigcap_i a_i \subset b_j$ . Die Relation  $\subset$  erweist sich leicht als reflexiv und transitiv, so daß also  $\mathfrak{B}$  ein Verband ist, wenn man  $a = b$  setzt, falls  $a \subset b$  und  $b \subset a$ . Zum Induktionsbeweis definiert man die Länge durch: 1)  $L(x_i) = 1$ , 2)  $L(\bigcap_i a_i) = L(\bigcup_i a_i) = \sum_i L(a_i)$ . — Jedes Element von  $\mathfrak{B}$  besitzt eine bis auf Kommutativität eindeutige Darstellung kleinster Länge. *Lorenzen (Gotenhafen).*

**Abe, Makoto: Eine Bemerkung über einfache Systeme.** Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 384—386 (1940).

Verf. beweist: Jedes einfache distributive System über einem vollkommenen Grundkörper läßt sich wesentlich eindeutig als ein einfaches System über einem endlichen Erweiterungskörper  $K$  betrachten, welches bei algebraischem Abschließen von  $K$  einfach bleibt. Diesen allgemeinen, von der Assoziativität unabhängigen Satz hat zuerst W. Landherr [Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 11, 41—64 (1935); dies. Zbl. 11, 245] im Fall der Charakteristik Null bewiesen unter der Voraussetzung, daß das System bei algebraischem Abschließen des Grundkörpers eindeutig in die direkte Summe der einfachen Ideale zerfällt. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß diese Voraussetzung eine Folgerung der Einfachheit des Systems ist, wenn der Grundkörper vollkommen ist. *Shoda (Osaka).*

**Jacobson, N.: A note on hermitian forms.** Bull. Amer. Math. Soc. 46, 264—268 (1940).

$\Phi$  sei ein beliebiger Schiefkörper von einer Charakteristik  $\neq 2$  mit einem involutorischen Antiautomorphismus  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ ; die Fälle, daß  $\Phi$  kommutativ und  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$  oder  $\Phi$  (relativ-) quadratisch und  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  ein Automorphismus von  $\Phi$  ist, sind mitinbegriffen.  $\Re$  sei der  $n$ -dimensionale Vektorraum über  $\Phi$ . Eine Bilinearform  $(x, y)$  wird definiert für  $x, y$  in  $\Re$  so, daß  $(x, y)$  in  $\Phi$  ist und  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ,  $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ ,  $(x, y\alpha) = (x, y)\alpha$ ,  $(\alpha x, y) = \bar{\alpha}(x, y)$  gelten. Dann ist  $(\sum x_i \xi_i, \sum x_j \eta_j) = \sum \xi_i \alpha_{ij} \eta_j$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis für  $\Re$  und  $(x_i, x_j) = \alpha_{ij}$  ist;  $A = (\alpha_{ij})$  heißt die Matrix von  $(x, y)$  für diese Basis. Geht man zu einer anderen Basis  $y_i = \sum x_j \varrho_{ji}$  über, so wird  $A$  durch die cogrediente Matrix  $\bar{R}' A R$  ( $R = (\varrho_{ji})$ ) ersetzt. Die hermitesche (schief-hermitesche) Form  $(x, y)$  entsteht, wenn auch  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  ( $(y, x) = -(x, y)$ ) gilt. Nach Verf. (dies. Zbl. 19, 194) ist dann  $A$  im



Fall  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$  für eine geeignete Basis diagonal, und die Form heißt nicht ausgeartet, wenn dabei die Diagonalelemente  $\neq 0$  sind. Zwei solche Formen sind cogredient, wenn sie cogrediente Matrices für eine gemeinsame Basis haben. Ist  $\Phi$  entweder ein quadratischer Körper  $\Phi_0(i)$  oder ein Quaternionenkörper  $\Phi_0(i, j)$  ( $i^2 = -\lambda$ ,  $j^2 = -\mu$ ) über einem Grundkörper  $\Phi_0$  und bedeutet  $\bar{\alpha}$  das zu  $\alpha$  konjugierte Element so ist  $(x, y)$  hermitesch. Dann ist  $\{x, y\} = \frac{1}{2} [(x, y) + (y, x)]$  eine „symmetrische“ Bilinearform im  $2n$ - bzw.  $4n$ -dimensionalen  $\Re$  über  $\Phi_0$  mit  $\{x, y\} = \{y, x\}$  und  $\{x\alpha, y\alpha\} = \{x, y\}\alpha\bar{\alpha}$ . Ist umgekehrt das Letzte der Fall, so wird bzw. durch

$$(x, y) = \begin{cases} \{x, y\} - \frac{i}{\lambda} \{x, yi\}, \\ \{x, y\} - \frac{i}{\lambda} \{x, yi\} - \frac{j}{\mu} \{x, yj\} - \frac{ij}{\lambda\mu} \{x, yij\} \end{cases}$$

die hermitesche Form über  $\Phi$  konstruiert, die wieder zu  $\{x, y\}$  führt.  $(x, y)$  und  $\{x, y\}$  heißen entsprechend. Sehr einfach beweist Verf. den Satz: Die hermiteschen Formen  $(x, y)_1, (x, y)_2$  sind dann und nur dann cogredient, wenn die entsprechenden  $\{x, y\}_1, \{x, y\}_2$  es sind. Als Anwendung werden die Invarianten der hermiteschen Formen für gewisse  $\Phi_0$  mit Hilfe einiger Sätze von Hasse und Witt bestimmt, darunter frühere Resultate von Moore und Landherr wiedergewonnen. Neu ist z. B.: Ist  $\Phi_0$  ein algebraischer Zahlkörper, so sind  $(x, y)_1$  und  $(x, y)_2$  in  $\Re$  über  $\Phi = \Phi_0(i, j)$  cogredient dann und nur dann, wenn die Signaturen beider Formen für die unendlichen Primstellen übereinstimmen, für die die  $p$ -adische Erweiterung von  $\Phi$  eine Divisionsalgebra ist. L. Rédei (Szeged).

**Ingraham, Mark H., and H. C. Trimble:** On the matrix equation  $TA = BT + C$ . Amer. J. Math. **63**, 9—28 (1941).

Untersuchung der Gleichung  $TA = BT + C$ , wo  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $T$  und  $C$  Matrizen vom Typus  $(n, n)$  bzw.  $(m, m)$  bzw.  $(m, n)$  sind, mit Begriffen und Methoden einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **17**, 99). Die Durchführung der Untersuchung geschieht in instruktiver Weise parallel für die beiden Fälle, daß die Elemente der Matrizen: a) einem Körper, b) einem Schiefkörper von endlichem Rang über seinem Zentrum angehören. Als Grundlage für den nichtkommutativen Fall b) dient die Theorie von Ore über nichtkommutative Polynome. — Für die vollständige rationale Lösung der Gleichung wird ein rationales Konstruktionsverfahren abgeleitet. Für  $C = 0$  werden die Eigenschaften der Lösung näher untersucht, sowie die möglichen Rangwerte von  $T$  bestimmt, woraus leicht die Bedingung für die Ähnlichkeit zweier Matrizen folgt. Im Fall  $C = 0$ ,  $A = B$  führen die Methoden der Verff. auf einen (auch anderweitig bemerkten) Isomorphismus des Ringes  $R(A)$  aller mit  $A$  vertauschbaren Matrizen. Schließlich wird [für den Fall a)] die praktische Bedeutung dieses Isomorphismus für eine eingehende Untersuchung des Ringes  $R(A)$  gezeigt. Rohrbach (Prag).

**Ward, James A.:** A theory of analytic functions in linear associative algebras. Duke math. J. **7**, 233—248 (1940).

Sind  $y_1, \dots, y_n$  Funktionen der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und sind  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  eine Basis einer Algebra  $\mathfrak{A}$ , so heißt  $\eta = \sum y_i \varepsilon_i$  eine Funktion von  $\xi = \sum x_i \varepsilon_i$ . Die Jacobische Matrix  $\left[ \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \right] = \frac{d\eta}{d\xi}$  heißt die Ableitung von  $\eta$  bezüglich  $\xi$ . Ist  $R_i$  bzw.  $\bar{R}_i$  die reguläre bzw. antistrophe Darstellung von  $\mathfrak{A}$  (Frobenius, S.-B. Preuß. Akad. Wiss. **1903**, 507), so versteht man unter der ersten abgeleiteten Algebra  $\mathfrak{D}$  die Algebra, die aus  $\sum a_i R_i \bar{R}_i$  besteht.  $\mathfrak{D}$  ist die minimale Algebra, die  $\mathfrak{A}$  und die reziprok isomorphe Algebra enthält. Eine Funktion  $\eta$  von  $\xi$  heißt analytisch, wenn die Ableitung  $\frac{d\eta}{d\xi}$  in  $\mathfrak{D}$  enthalten ist. Diese Definition ist mit der von Hausdorff [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **52** (1900)] angegebenen Definition der analytischen Funktion äquivalent. Gewisse elementare formale Sätze in der üblichen Theorie der analytischen Funktionen werden übertragen. Eine Funktion  $\zeta$  ist dann und nur dann integrierbar, wenn



$Q'(\alpha) \frac{d\zeta}{d\xi}$  für jedes  $\alpha$  aus  $\mathfrak{A}$  symmetrisch ist, wo  $Q'(\alpha)$  die transponierte Matrix der parastrophen Matrix (Frobenius, a. a. O.) ist. Ist  $\mathfrak{A}$  kommutativ, so ist  $\zeta$  dann und nur dann integrierbar, wenn  $\xi$  analytisch ist. Zum Schluß gibt der Verf. ein vollständiges Literaturverzeichnis an.

Shoda (Osaka).

### Zahlkörper:

Whiteman, Albert Leon: Additive prime number theory in real quadratic fields. Duke math. J. 7, 208—232 (1940).

Es handelt sich um die Goldbachsche Vermutung in algebraischen Zahlkörpern. Rademacher [Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I, II, III, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 3, 109—163, 331—378 (1924); Math. Z. 27, 321 bis 426 (1926)] bewies u. a.: In einem totalreellen algebraischen Zahlkörper lassen sich alle genügend großen totalpositiven (tp.) „ungeraden“ ganzen Zahlen als Summe von drei tp. Primzahlen darstellen, wenn nur die obere Grenze  $\theta$  der Realteile der Nullstellen aller zugehörigen Heckeschen  $\zeta(s, \lambda)$ -Funktionen der Hypothese  $\theta < \frac{3}{4}$  genügt [eine Zahl  $\alpha$  heißt Primzahl, wenn das Hauptideal  $(\alpha)$  Primideal ist]. Estermann (dies. Zbl. 20, 105) bewies, daß für „fast alle“ geraden, ganzrationalen Zahlen die ursprüngliche Goldbachsche Vermutung statthat. Verf. verschärft Rademachers Untersuchungen dahin, daß im Spezialfall eines reellquadratischen Zahlkörpers  $k(d^{\frac{1}{2}})$  „fast alle“ „geraden“ ganzen Körperzahlen sich als Summe von zwei tp. Primzahlen darstellen lassen, wieder unter der Hypothese  $\theta < \frac{3}{4}$ . Er gewinnt nämlich folgende Abschätzung

$$\sum_{\mu} \left( A_m(\mu) - \frac{d^{\frac{1}{2}}}{(2h\log\eta)^m \Gamma^2(m)} N(\mu)^{m-1} \mathfrak{S}_m(\mu) \right)^2 \leq C(VV')^{2\theta+2m-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Hier sind  $d$  die Diskriminante von  $k(d^{\frac{1}{2}})$ ,  $h$  die Klassenzahl,  $\eta$  die tp. Grundeinheit,  $N$  das Zeichen für die Norm in  $k(d^{\frac{1}{2}})$ ,  $V, V', \varepsilon$  beliebige positive Zahlen,  $m (\geq 2)$  eine beliebige ganz rationale Zahl,  $C$  eine positive Konstante (unabhängig von  $V, V', \varepsilon$ ); die Summe ist über die ganzen Zahlen  $\mu$  in  $k(d^{\frac{1}{2}})$  mit  $0 < \mu \leq V, 0 < \mu' \leq V'$  ( $\mu'$  konjugiert zu  $\mu$ ) zu erstrecken. Weiter ist

$$A_m(\mu) = \sum \log N(\omega_1) \log N(\omega_2) \cdots \log N(\omega_m),$$

wobei über alle Zerlegungen  $\mu = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_m$  mit tp. Primzahlen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  zu summieren ist, und  $\mathfrak{S}_m(\mu)$  ist die sog. „singuläre Reihe“

$$\mathfrak{S}_m(\mu) = \prod_{\mathfrak{P} \nmid \mu} \left( 1 - \left( \frac{-1}{N(\mathfrak{P}) - 1} \right)^m \right) \prod_{\mathfrak{P} \mid \mu} \left( 1 + \frac{(-1)^m}{(N(\mathfrak{P}) - 1)^{m-1}} \right)$$

( $\mathfrak{P}$  Primideal in  $k(d^{\frac{1}{2}})$ ). Hieraus leitet Verf. für  $m = 2$  den Satz ab:

$$\lim_{V, V' \rightarrow \infty} P(V, V') : (VV')^{2\theta-\frac{1}{2}+\varepsilon} = 0,$$

wobei  $P(V, V')$  die Anzahl der tp. „geraden“ ganzen Zahlen in  $k(d^{\frac{1}{2}})$  bedeutet, die sich nicht als Summe von zwei tp. Primzahlen in  $k(d^{\frac{1}{2}})$  darstellen lassen. Ist hier  $\theta < \frac{3}{4}$ , so folgt obige Aussage. Die Arbeit stützt sich in vielem auf Rademachers Arbeiten, benutzt auch ältere Untersuchungen des Verf. Statt  $\sum_{\omega} \exp(-\omega t - \omega' t')$

( $\omega$  tp. Primzahl in  $k(d^{\frac{1}{2}})$ ,  $\omega'$  konjugiert zu  $\omega$ ) legt sie den Betrachtungen die Funktion  $\sum_{\omega} \log N(\omega) \exp(-\omega t - \omega' t')$  zugrunde (vgl. Rademacher I, 110—111). Verf. bemerkt, daß die Erweiterung auf allgemeine algebraische Zahlkörper durch die von Rademacher entwickelten Hilfsmittel möglich ist.

Rédei (Szeged).

### Zahlentheorie:

● Uspensky, J. V., and M. A. Heaslet: Elementary number theory. New York a. London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1939. X, 484 pag. 26/-.



● **Dickson, Leonard Eugene:** *Modern elementary theory of numbers.* London: Cambridge univ. press a. Chicago: Univ. of Chicago press 1939. VII, 309 pag. 18/-.

**Bioche, Ch.:** *Sur le nombre  $e$ , et les nombres qui s'écrivent avec des chiffres différents.* C. R. Soc. Math. France année 1938, 30—31 (1939).

Für die Anzahl  $N$  der ganzen Zahlen zur Basis  $n$  mit  $p$  voneinander verschiedenen Ziffern ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) gilt

$$N = (n-1)(n-1)!e - \vartheta \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Der Koeffizient von  $e$  ist hierin nichts anderes als die Anzahl der  $n$ -stelligen Zahlen zur Basis  $n$ . Rohrbach (Prag).

**Bioche, Ch.:** *Sur les multiples de 11 qui s'écrivent avec 10 chiffres différents.* C. R. Soc. Math. France année 1938, 37—38 (1939).

Berechnung der Anzahl der durch 11 teilbaren Zahlen mit zehn voneinander verschiedenen Ziffern (erste Ziffer  $\neq 0$ ). Rohrbach (Prag).

**Stern, Erich:** *General formulas for the number of magic squares belonging to certain classes.* Amer. Math. Monthly 46, 555—581 (1939).

Anzahlbestimmungen für magische Quadrate der Primzahlordnung  $n$ , die sich aus geeigneten Paaren zyklisch aufgebauter lateinischer Quadrate dadurch bilden lassen, daß man den Paaren von Elementen zweistellige Zahlen im System der Grundzahl  $n$  zuordnet. Sprague (Berlin).

**Aucoin, A. A.:** *Diophantine equations of degree  $n$ .* Bull. Amer. Math. Soc. 46, 334—339 (1940).

Es werden diophantische Gleichungen von der Art

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_p) = g(y_1, \dots, y_q)$$

betrachtet. Dabei sind  $f$  und  $g$  homogene Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten von den Graden  $n$  bzw.  $m$ . Eine Lösung  $x_i = \alpha_i, y_k = \beta_k$  von (1) heißt primitiv, wenn es keine ganzen Zahlen  $r > 1, \alpha'_i, \beta'_k$  gibt, so daß  $\alpha_i = r^\lambda \alpha'_i, \beta_k = r^\mu \beta'_k$ , wo  $\lambda > 0, \mu > 0, (\lambda, \mu) = 1$  und  $\lambda n = \mu m$ . Ist  $x_i = \alpha_i, y_k = \beta_k$  eine primitive Lösung von (1), so ist auch  $x'_i = \alpha_i r^\lambda, y'_k = \beta_k r^\mu$  eine Lösung ( $\lambda, \mu$  wie oben). Zwei solche Lösungen heißen äquivalent. Das Hauptergebnis der Arbeit ist: Sind  $a_1, \dots, a_p$  ganz, nicht alle 0, und verschwinden hierfür alle partiellen Ableitungen von  $f$  mit der Ordnung  $e$  ( $1 \leq e < n-1$ ), dann ist jede Lösung von (1) in ganzen Zahlen  $x_i, y_k$ , für

die  $\sum_{j=1}^p a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \neq 0$  ist, mit einer der Lösungen

$$x_i = a_i s t^{\lambda-1} + \alpha_i t^\lambda, \quad y_k = \beta_k t^\mu, \quad i = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, q$$

äquivalent. Dabei sind  $\lambda > 0, \mu > 0$  ganz und  $\lambda n = \mu m, \alpha_i, \beta_k$  beliebig ganz,

$$s = g(\beta_1, \dots, \beta_q) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad t = \sum_{j=1}^p a_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}. \quad \text{Hofreiter (Wien).}$$

**Chatrovsky, L.:** *Sur les bases minimales de la suite des nombres naturels.* Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 335—339 u. franz. Zusammenfassung 339—340 (1940) [Russisch].

Es sei  $\varphi$  eine wachsende Folge  $a_1 < a_2 < \dots$  natürlicher Zahlen,  $\varphi(x)$  die Anzahl der  $a_n$ , die  $\leq x$  sind.  $\varphi$  heißt eine Basis  $h$ -ter Ordnung (für die Menge aller natürlichen Zahlen), wenn jede natürliche Zahl als Summe von höchstens  $h$  Zahlen aus  $\varphi$  darstellbar ist. Stöhr hat Basen  $h$ -ter Ordnung mit  $\varphi(x) = O(x^{1/h})$  konstruiert (dies. Zbl. 16, 348, wiedergefunden von Raikov, dies. Zbl. 18, 6). Verf. gibt ein anderes, auf elementaren zahlentheoretischen Sätzen beruhendes Verfahren an, welches unendlich viele derartige Basen liefert; dagegen benutzte Stöhr die Darstellung der natürlichen Zahlen in einem Ziffernsystem mit der Grundzahl  $g$ . Wegen verwandter Fragen vgl. auch Rohrbach (dies. Zbl. 15, 200). Jarník (Prag).



**Chung, Kai-Lai:** Two remarks on Viggo Brun's method. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Kunming A 4, 249—255 (1940).

Mit der Methode des Siebes von Brun hat Romanoff gezeigt: Bei jedem ganzen  $a > 1$  ist für  $x \geq 3$  die Anzahl der Zahlen  $p + a^i \leq x$  mit ganzen  $i \geq 0$ , wobei  $p$  Primzahlen bezeichnet, größer als  $\frac{x}{c(a)}$ .  $c(a)$  bedeutet eine nur von  $a$  abhängige pos. Konstante. (Vgl. E. Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge 1937; dies. Zbl. 16, 202). — Verf. beweist nun nach dem Landauschen Paradigma u. a. genau dasselbe für die Anzahl der Zahlen

$$pp' + a^{p^*} \leq x \quad (x \geq 6 + a^2),$$

wobei  $p, p', p^*$  lauter Primzahlen bezeichnen.

Z. Suetuna (Tokyo).

**Hua, Loo-Keng:** On Warings problem with cubic polynomial summands. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Kunming A 4, 55—83 (1940).

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze Zahlen. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{6}a(x^3 - x) + \frac{1}{2}b(x^2 - x) + cx + d, \quad (a, b, c) = 1, \quad a > 0.$$

Dann lautet der Hauptsatz: Sieht man von zwei Ausnahmefällen ab, so sind fast alle  $n > 0$  in der Gestalt  $n = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$  mit  $x_i > 0$  darstellbar (und die Anzahl 4 ist scharf). Die Ausnahmefälle sind I.  $f(x) \equiv 2(2a_1 + 1)x^3 + (2b_1 + 1)x^2 + 2(2c_1 + 1)x + d_1 \pmod{16}$ ; II.  $f(x) \equiv a_2x^3 + 3b_2x^2 + 3c_2x + d_2 \pmod{9}$ ,  $b_2^2 \equiv a_2(c_2 + a_2) \pmod{3}$ . In diesen Ausnahmefällen gilt das Resultat auch, wenn man von den (nicht darstellbaren) Zahlen der Gestalt  $n \equiv i(4a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 5) + 4d_1 \pmod{8}$ ,  $i = 5, 6, 7$  (im Falle I) bzw.  $n \equiv \pm a_2 + 4(3b_2 + d_2 - b_2^2/a_2^2) \pmod{9}$  (im Falle II) absieht. Der analytische Teil des Beweises schließt sich eng der Arbeit von Davenport (dies. Zbl. 21, 106) an, wo der Spezialfall  $f(x) = x^3$  des Hauptsatzes bewiesen wurde; Verf. begnügt sich daher in diesem Teil mit Hinweisen auf Davenport, leider mit verschiedenen Versehen in den Exponenten von  $P$ ; auch der Druckfehler  $p$  statt  $P$  wiederholt sich oft. Im Beweis des Hauptsatzes macht der Fall  $f(x) \equiv 4a'x^3 + (2b' + 1)x^2 + 2c'x + d' \pmod{16}$  noch besondere Schwierigkeiten, deren Überwindung auf S. 81—82 nur angedeutet wird; dabei muß aber  $r$  auf S. 82 kleiner gewählt werden, wenn  $\lambda_r = O(\log \log N)$  herauskommen soll. Wegen der Abschätzung der trigonometrischen Summe  $S_{a,q}$  wird auf die Arbeit des Verf. On exponential sums verwiesen, die in derselben Zeitschrift erscheinen soll. Das Nachprüfen ist durch zahlreiche Druck- und Schreibfehler (sowie durch Inkonssequenzen in der Bezeichnung) erschwert, von welchen folgende angeführt sein mögen: S. 57, Z. 11 lies  $X = \frac{2}{3} \log P$ ; Z. 14 und 16 lies  $\mathfrak{S}$  statt  $\mathfrak{D}$ ; S. 74, Z. 7 v. u. lies  $g(2y + 1)$  statt  $y(2y + 1)$  und  $2b'$  statt  $4b'$ ; S. 78, Z. 11 v. u. lies  $\pmod{2^5}$ ; Z. 8 v. u. lies  $v = 0$ ; S. 81, Z. 3 v. u. lies  $2c_1$  statt  $2(2c_1 + 1)$ ; S. 82, Z. 2 ist falsch (vgl. Z. 7). Jarník (Prag).

**Pall, Gordon:** An almost universal form. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 291 (1940).

Eine quadratische Form  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  heißt fast universal, wenn sie alle positiven ganzen Zahlen mit genau einer Ausnahme darstellt. Verf. zeigt, daß die Form  $x^2 + 2y^2 + 7z^2 + 13t^2$  fast universal ist und ergänzt damit die Untersuchungen von Halmos (dies. Zbl. 18, 107). Hofreiter (Wien).

**Linnik, G.:** A general theorem on representation of numbers by some ternary quadratic forms. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 87—108 u. engl. Zusammenfassung 108 [Russisch].

Eine ternäre quadratische Form stellt bekanntlich jede zur Diskriminante prime Zahl  $M$  rational dar, wenn sie die für das Geschlecht erforderlichen Bedingungen erfüllt. Dabei kann über den Nenner noch weitgehend verfügt werden. Er darf zu jeder vorgegebenen Zahl prim angenommen werden. Multipliziert man  $M$  mit dem Quadrat des Nenners oder eines Multiplums des Nenners, so erhält man ganzzahlig darstellbare Zahlen. Es scheint nun, daß die möglichen Nenner und ihre Multipla überhaupt alle zur Diskriminante primen Zahlen mit endlich vielen Ausnahmen erschöpfen, so daß



also alle den obigen Bedingungen genügenden Zahlen  $M$ , welche selbst quadratische Teiler von hinreichender Größe besitzen, sogar ganzzahlig dargestellt werden können. Daß dies tatsächlich der Fall ist für positive, eigentlich primitive Formen mit ungeraden, zueinander primen Invarianten  $\Omega$ ,  $\Delta$ , wird in der vorliegenden Abhandlung bewiesen.

H. Brandt (Halle).

**Linnik, G.: Über die Darstellung ganzer Zahlen durch positive ternäre quadratische Formen.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 363—401 u. dtsh. Zusammenfassung 401—402 (1940) [Russisch].

Wenn ein Geschlecht von binären quadratischen Formen Formen enthält, die weder eigentlich noch uneigentlich äquivalent sind, so verteilen sich bekanntlich die durch die Formen des Geschlechts darstellbaren Zahlen auf mehrere Reihen, welche zwar zusammengesetzte Zahlen mehrfach, Primzahlen aber nur je einmal enthalten können, derart, daß durch die Formen einer Klasse und der entgegengesetzten immer nur die Zahlen einer solchen Reihe darstellbar sind. Im Gegensatz dazu zeigen ternäre quadratische Formen ein anderes, wenn auch noch nicht vollständig bekanntes Verhalten. Jedenfalls sind aber in vielen Fällen die durch die Formen eines Geschlechts darstellbaren Zahlen höchstens mit endlich vielen Ausnahmen auch durch jede einzelne Form darstellbar. Das wird in der vorliegenden Abhandlung unter weitgehender Benutzung von Quaternionen für positive, eigentlich primitive Formen, deren Invariante  $\Delta$  den Wert 1 hat, während die Invariante  $\Omega$  ungerade und quadratfrei ist, unter einer Zusatzbedingung bewiesen. Diese Bedingung, von der zweifelhaft bleibt, ob sie wesentlich ist oder nur in dem Beweisverfahren begründet ist, besagt, daß in der Stammdiskriminante der betreffenden Form (vgl. eine Abhandlung des Ref., dies. Zbl. 17, 196) mindestens einer der Primfaktoren aus  $\Omega$  fehlen muß. H. Brandt.

**Krechmar, V.: On the superior bound of the number of representations of an integer by binary forms of the fourth degree.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 289—302 u. engl. Zusammenfassung 302 [Russisch].

In the present paper we prove by a method due to Siegel (Abh. Preuß. Akad. Wiss. 1929) that the number of representations of 1 by the form  $a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$  does not exceed 20, if the cubic invariant of the form vanishes, i. e., if  $J = 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_1^2a_4 - 72a_0a_2a_4 + 27a_0a_3^2 = 0$ . This estimation of the number of representations seems to be not the best possible. Auszug.

**Segal, B.: On certain sets of integers.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 319—334 u. engl. Zusammenfassung 334 (1940) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz: Es sei  $N > 0$ ,  $n \geq 2$  eine ganze Zahl;  $r$  bezeichne die größte gerade Zahl, für die  $r < 4,81n(n+1)(n+2)\log n$  ist,  $l$  sei  $\geq r+1$ . Es mögen  $p_1 \dots p_l$  gegebene Primzahlen sein,  $\sigma_1 \dots \sigma_l$  eine Folge von  $n$ -ten Potenzen ganzer Zahlen; schließlich genüge  $d$  den Einschränkungen

$$\exp(-\Delta) \leq d \leq \exp(\Delta), \quad \Delta = \exp(-(\log \log N)^{1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Die Anzahl  $J_N$  der Darstellungsmöglichkeiten von  $N$  in der Form  $N = d p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_l^{\sigma_l}$  wird dann durch folgende asymptotische Formel gegeben:

$$J_N = 2 \left( \Gamma \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^l (\log p_1)^{-\frac{1}{n}} \dots (\log p_l)^{-\frac{1}{n}} \left( \Gamma \left( \frac{l}{n} \right) \right)^{-1} (\log N)^{\frac{l}{n}-1} \Delta + \\ + O \left( (\log N)^{\frac{l}{n}-1} \exp(-(\log \log N)^{1-\eta}) \right),$$

wobei  $0 < \eta < \varepsilon$  ist. — Nach Auszug.

Harald Geppert (Berlin).

**Rosser, Barkley: Explicit bounds for some functions of prime numbers.** Amer. J. Math. 63, 211—232 (1941).

Counting 2 as the first prime let us denote by  $\pi(x)$ ,  $p(n)$ , and  $\theta(x)$ , respectively, the number of primes less than or equal to  $x$ , the  $n$ -th prime, and the logarithm of the product of all primes less than or equal to  $x$ . It is known that for each positive constant  $A$ , there is a constant  $N$  for which the three following statements hold true.



If  $N \leq x$ , then  $\frac{x}{\log x - 1 + A} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 1 - A}$ . If  $N \leq n$ , then  $n \log n + n \log \log n - n - An < p(n) < n \log n + n \log \log n - n + An$ . If  $N \leq x$ , then  $(1 - \frac{A}{\log x})x < \theta(x) < (1 + \frac{A}{\log x})x$ . These three statements are essentially interdeducible in a certain sense. The author answers two questions: (1) of determining the  $N$  which goes with a particular  $A$ , and (2) of how small  $A$  can be taken without requiring that  $N$  becomes large. An explicit answer to the first question is given by: if  $\varepsilon(x) = (\log x)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\log x / 19}}$  and  $e^{4000} \leq x$ , then  $(1 - \varepsilon(x))x < \psi(x) < (1 + \varepsilon(x))x$ , where  $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ . For the method of proof see the author's paper [Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 21—44 (1939); this Zbl. **19**, 394]. For the second question the answer  $A = 3$  is given; a partial proof is given that we can take  $A = 1$ . *S. Ikehara.*

**Vinogradov, I.:** Elementary estimations of a certain trigonometrical sum with primes. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **1939**, 111—121 u. engl. Zusammenfassung 121—122 [Russisch].

Im Folgenden bedeuten  $p$  stets Primzahlen,  $\exp z = e^z$ ,  $c$  bzw.  $c(x, y, z)$  eine positive absolute Konstante bzw. eine positive Zahl, die nur von  $x, y, z$  abhängt. — I. Es sei  $h > 1$ ,  $0 < \delta \leq 2$ ,  $0 < \eta \leq 1/16$ ,  $N > 2$ ,  $r = \log N$ ,  $A = NH^{-1}$ ,  $1 \leq H \leq \exp(r^\delta \eta)$ ,  $A \leq N' \leq N$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $r^\delta < q \leq r^h$ . Dann ist

$$\left| \sum_{N' - A < p \leq N'} \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} p\right) \right| < c(\delta, \eta, h) \frac{A}{r} q^{4\eta - \frac{1}{2}}.$$

Eine kurze Anzeige von I. ist bereits früher erschienen (vgl. dies. Zbl. **21**, 391). Bei dem Beweis wird außer den Vinogradowschen Ideen auch das Brunsche Siebverfahren benutzt. Verf. betont (ohne Beweis), daß auch  $\sum_{p \leq N} \left(\frac{p+k}{q}\right)$  ähnlich behandelt werden

kann. — II. Es sei  $N > 2$ ,  $r = \log N$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $\alpha$  reell,  $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq q^{-2}$ ,  $0 < q \leq N$ ,  $Q = \min\left(q, \frac{N}{q}\right) \leq \exp(\sqrt{r})$ . Dann ist  $\left| \sum_{p \leq N} \exp(2\pi i \alpha p) \right| < cNr^2 Q^{-\frac{1}{2}}$ . (vgl. dies. Zbl. **17**, 389; **18**, 390; **22**, 311). — Auf S. 114, Z. 9 v. u. fehlt im ersten Ausdruck noch der Faktor  $r^\delta \eta$ ; auf S. 115, letzte Zeile, ersetze man das letzte  $+$  durch  $=$ . *Jarník.*

**Hlawka, Edmund:** Über komplexe homogene Linearformen. Mh. Math. Phys. **49**, 321—326 (1941).

Minkowski (Diophantische Approximationen) hat bewiesen: Wenn  $L_1 = \alpha x + \beta y$ ,  $L_2 = \gamma x + \delta y$  zwei lineare Formen mit komplexen Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ,  $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$ , bedeuten, so gibt es immer mindestens ein Paar ganzer Zahlen  $x, y$ ,  $|x| + |y| \neq 0$ , aus dem Gaußschen Körper  $k(i)$ , für die zugleich  $|L_1| \leq K$  und  $|L_2| \leq K$  gilt, wo  $K^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Verf. gibt einen anderen Beweis dieses Satzes, indem er die beiden Hermiteischen Formen  $F_1 = |L_1|^2 + |L_2|^2$ ,  $F_2 = |L_1|^2 - |L_2|^2$  bildet,  $F_1$  auf die Blahasche reduzierte Form bringt [Mh. Math. Phys. **47**, 195—212 (1938); dies. Zbl. **20**, 201] und den Ausdruck  $f(x, y) = F_1 + |F_2|$  betrachtet. Es genügt dann zu zeigen: Es ist entweder  $f(1, 0) \leq 2K^2$  oder  $f(-1, 1) \leq 2K^2$ . Dieser letzte Satz wird nun durch längere Fallunterscheidungen elementar bewiesen. Auch die Grenzfälle werden auf diese Weise miterhalten. *Pisot (Greifswald).*

**Gelfond, A.:** Sur l'approximation du rapport des logarithmes de deux nombres algébriques au moyen de nombres algébriques. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **1939**, 509—517 u. franz. Zusammenfassung 518 [Russisch].

Hauptsatz: Es sei  $n > 0$  ganz; es seien  $\alpha, \beta$  zwei von 0 und 1 verschiedene algebraische Zahlen mit folgender Eigenschaft (A): für ganze  $x, y$  ist die Gleichung  $\alpha^x \beta^y = 1$  nur für  $x = y = 0$  erfüllt. Man fixiere irgendwie die Werte  $\log \alpha, \log \beta$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $H'(\varepsilon) > 0$  mit folgender Eigenschaft: genügt  $\theta$  einer



Gleichung  $H_0\theta^n + H_1\theta^{n-1} + \dots + H_n = 0$  mit ganzen rationalen  $H_i$  und mit  $0 < \max_{0 \leq i \leq n} |H_i| = H$ , wo  $H > H'(\varepsilon)$ , so ist  $|\log \alpha / \log \beta - \theta| > \exp(-\log^3 + \varepsilon H)$ . Dieser Satz enthält natürlich die Transzendenz von  $\log \alpha / \log \beta$  (vgl. auch dies. Zbl. 11, 339; 12, 248; 17, 152). — Verf. macht im Hauptsatz statt (A) die Voraussetzung „ $\log \alpha / \log \beta$  ist irrational“, benutzt aber im Beweis die Eigenschaft (A), die daraus nicht folgt (Beispiel:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -2$ ). — Es folgt ein Satz über eine besondere Art von Exponentialgleichungen, dessen Wortlaut aber wohl unvollständig ist; bei negativen Werten von  $x, y$  stimmt die Herleitung nicht und auch bei positiven  $x, y$  ist Ref. nicht klar, ob in (49) die Zeichen  $\ln \alpha, \ln \beta$  bei verschiedenen Werten von  $x, y$  immer dieselben Werte des Logarithmus bedeuten. — In (14) fehlt ein  $s!$  im Nenner. Auf S. 511, Z. 4 v. u. lies  $N^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}$ ; weiter  $\gamma_2 < \gamma_0 < \gamma_1 + \gamma_2 - 1$  statt  $\gamma_0 < \gamma_2$ ; in (15) lies  $\leq$  statt  $=$ . Auf S. 512, Z. 6 und S. 513, Z. 20 lies  $r_2 = [\eta N^{\gamma_2} \ln^{\gamma_2} N]$ . In (16), (17) fehlt im Exponenten in denjenigen Gliedern, in welchen  $\ln^{1+\gamma_2} N$  auftritt, der Faktor  $\eta$ , was weiter auf S. 514 zu beachten ist. Ref. scheint es auch, daß (38) durch  $2 < 1 - \delta/8 + 7\delta p/8, 1 + 7\delta p/8 < 2 + \varepsilon/2$  ersetzt werden soll. *Jarník.*

**Robinson, Raphael M.:** The approximation of irrational numbers by fractions with odd or even terms. Duke math. J. 7, 354—359 (1940).

Using continued fractions, the author proves a theorem of W. T. Scott (this Zbl. 22, 308) on the approximation of an irrational number  $\xi$  by fractions  $\frac{A}{B}$  of any one of the three selected types  $\frac{\text{odd}}{\text{odd}}, \frac{\text{odd}}{\text{even}}, \frac{\text{even}}{\text{odd}}$  and some more theorems of this kind.

*J. F. Koksma (Amsterdam).*

## Gruppentheorie.

**Cheissin, G.:** Die Klassifikation von Gruppen, deren Ordnung  $p^2 q^2$  ist. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 535—551 u. dtsh. Zusammenfassung 551 (1940) [Russisch].

Die Gruppen der Ordnung  $p^2 q^2$  ( $p > q$  verschiedene Primzahlen, wobei  $p^2 q^2 \neq 36$ ) werden als Erweiterungen der abelschen  $p$ -Sylowgruppe mit einer abelschen  $q$ -Sylowgruppe als Vertretersystem aufgefaßt und sämtliche Typen durch Erzeugende und definierende Relationen angegeben.

*Zassenhaus (Hamburg).*

**Dubuque, P.:** Sur le normalisateur d'un élément dans un groupe fini. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 123—136 u. franz. Zusammenfassung 136—140 [Russisch].

Verf. beweist mit der bekannten Methode der monomialen Darstellungen unermüdlich triviale Aussagen über die Existenz eigentlicher Normalteiler endlicher Gruppen (vgl. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 285—300; dies. Zbl. 23, 299), z. B. Satz 13: Wenn in der endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  des Normalisators des Elementes  $A$  mit  $p$ -Potenzordnung abelsch ist und  $A$  als einziges zu  $A$  unter  $\mathfrak{G}$  konjugiertes Element enthält, so hat  $\mathfrak{G}$  einen echten Normalteiler von  $p$ -Potenzindex. Grund:  $V_{\mathfrak{G} \rtimes \mathfrak{P}}(A) \neq 1$ . Es wäre zu begrüßen, wenn Verf. die Methode an einem ernststen Probleme erprobt, z. B. Auflösbarkeit der Gruppen von der Ordnung  $p^a q^b$  oder Nichtexistenz einfacher Gruppen mit zusammengesetzter Ordnung, in denen für jedes  $p$  jede  $p$ -Sylowgruppe ihr eigener Normalisator ist.

*Zassenhaus (Hamburg).*

**Sëyanoff, P.:** Sur les diviseurs normaux d'un groupe. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 529—532 u. franz. Zusammenfassung 533—534 (1940) [Russisch].

Verf. bezeichnet den Komplex  $\mathfrak{S}$  aus der Gruppe  $\mathfrak{G}$  als durch den Komplex  $\mathfrak{S}'$  mod der in  $\mathfrak{G}$  enthaltenen Halbgruppe  $\mathfrak{H}$  dargestellt:  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}$ , wenn es zu jedem  $s$  aus  $\mathfrak{S}$  ein  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  und ein  $s'$  aus  $\mathfrak{S}'$  gibt, so daß  $s = hs'$ . Satz 1: Alle  $x$ , für die  $\mathfrak{S}x \rightarrow \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}$ , bilden eine Halbgruppe  $\mathfrak{f}$ . Wenn  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ , so  $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{G}$ . Satz 2: Wenn  $\mathfrak{A}$  ein invarianter Komplex ( $\neq e!$ ) ist, so daß  $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}$ ,  $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \rightarrow \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}$



und wenn  $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}$  nicht leer sind,  $\mathfrak{H}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{G}$  ist (und  $\mathfrak{G}$  mehr als zwei Elemente enthält!), so besitzt  $\mathfrak{G}$  einen eigentlichen Normalteiler. Indem in Satz 2  $\mathfrak{H} = e$  gesetzt wird, entsteht Satz 3: Wenn  $\mathfrak{A}$  ein invarianter Komplex ist und  $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$  zwei nicht leere Komplexe sind, so daß  $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}'$ ,  $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \subseteq \mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{G}$  ist, dann besitzt  $\mathfrak{G}$  einen eigentlichen Normalteiler ( $|\mathfrak{G}| > 2!$ ).  
Zassenhaus (Hamburg).

**Shoda, Kenjiro:** Über die Invarianten endlicher Gruppen linearer Substitutionen im Körper der Charakteristik  $p$ . Jap. J. Math. **17**, 109—115 (1940).

Ziel der Arbeit ist der Beweis des Endlichkeitssatzes für die Invarianten der endlichen Gruppen gebrochener linearer Substitutionen in Körpern beliebiger Charakteristik  $p$ . Im Falle eines vollkommenen Grundkörpers beruht der Beweis auf der Methode von R. Brauer [Math. Ann. **110**, 473—500 (1934); dies. Zbl. **10**, 245]. Anstatt mit dem Ausdruck  $J = \frac{1}{r} \sum_C J_C$ , den R. Brauer gebraucht hat, zu arbeiten, stützt

sich der Verf. nur auf die Formel  $J^{p^r} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \prod_{C \in \mathfrak{S}_{P_i}} J_C$ . Dabei ist  $\mathfrak{S}$  eine Sylowgruppe

von der Ordnung  $p^r$  und  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_{P_1} + \mathfrak{S}_{P_2} + \dots + \mathfrak{S}_{P_q}$  die Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  in rechtsseitige Nebengruppen nach  $\mathfrak{S}$ . Für den unvollkommenen Fall gelingt dem Verf. der Beweis auch einfach. Zum Schluß werden einige Sätze für die Invarianten einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen als eine Anwendung der Darstellungstheorie untersucht. Ein Satz lautet: Sind der Invariantenbereich für  $\mathfrak{G}$  und alle Oberbereiche endlich, so ist der Invariantenbereich für einen Bestandteil  $\mathfrak{G}_1$  auch endlich. S. Mori.

**Wigner, Eugene P.:** On representations of certain finite groups. Amer. J. Math. **63**, 57—63 (1941).

Diese Arbeit schließt sich an eine Arbeit von Frobenius und Schur (S.-B. Preuß. Akad. Wiss. **1906**, 186—208) an. Der Verf. betrachtet hauptsächlich die endlichen Gruppen mit den folgenden Bedingungen: Alle Klassen konjugierter Elemente sind ambivalent, d. h. zweiseitig im Sinne von Frobenius und Schur. Das Kroneckersche Produkt zweier irreduzibler Darstellungen zerfällt in lauter verschiedene irreduzible Bestandteile. Eine solche Gruppe heißt *S.R. Gruppe*. Bezeichnet man die Anzahl der Lösungen  $S$  von  $S^2 = R$  in einer beliebigen endlichen Gruppe mit  $\zeta(R)$ , so ist  $\sum_R \zeta(R)^2$

gleich der Anzahl der Lösungen  $S, R$  von  $S^2 = R^2$  und nach Frobenius und Schur gleich dem Produkt der Ordnung der Gruppe mit der Anzahl der zweiseitigen Klassen. Merkwürdig ist der Satz: Für eine beliebige Gruppe gilt  $\sum_R \zeta(R)^3 \leq \sum_R v_R^2$ , wo  $v_R$  die

Anzahl der mit  $R$  vertauschbaren Elemente bedeutet. Das Gleichheitszeichen besteht dann und nur dann, wenn die Gruppe *S.R. Gruppe* ist. Als eine Folgerung dieses Satzes kann man nach dem Vorbild der zweidimensionalen unitären Gruppen den Begriff der geraden und ungeraden Darstellungen einführen, so daß keine Darstellung einer *S.R. Gruppe* gleichzeitig gerade und ungerade sein kann. Damit erhält man eine Klassifikation der Darstellungen der *S.R. Gruppen*. Shoda (Osaka).

**Nisnewitsch, V. L.:** Über Gruppen, die durch Matrizen über einem kommutativen Feld isomorph darstellbar sind. Rec. math. Moscou, N. s. **8**, 395—403 u. dtsh. Zusammenfassung 403 (1940) [Russisch].

Satz 1: Wenn jeder Faktor  $\mathfrak{G}_\alpha$  eines freien Produktes eine treue Darstellung  $D_\alpha$  über festem Körper  $k$  besitzt, so hat das freie Produkt der  $\mathfrak{G}_\alpha$  eine treue Darstellung  $(n+1)$ -ten Grades über einem Oberkörper von  $k$ . Die zugehörige Darstellungsgruppe wird erzeugt aus allen Matrizen  $X_\alpha \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_\alpha^{-1}$ , wobei die je  $(n+1)^2$  Koeffizienten der  $X_\alpha$  lauter verschiedene Polynomvariablen sind. — Satz 2: Wenn jede aus endlich vielen Elementen erzeugte Untergruppe einer abzählbaren Gruppe eine treue Darstellung  $n$ -ten Grades über  $k$  besitzt, so hat die ganze Gruppe eine treue Darstellung  $n$ -ten Grades über einem Oberkörper von  $k$ . Beweis durch eine naheliegende algebraische Approximation. Zassenhaus (Hamburg).



**Kontorovitch, P.:** Sur les groupes normalement décomposables. 1. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 423—434 u. franz. Zusammenfassung 435—436 (1940) [Russisch].

Eine Gruppe heißt normal zerlegbar, wenn jedes ihrer Elemente einem echten Normalteiler der Gruppe angehört. Ein System  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots$  von Normalteilern, das die Gruppe überdeckt, heißt invariante Basis. Aus dem Lemma, daß eine Gruppe normal zerlegbar ist, sobald es eine ihrer Faktorgruppen ist, und dem Satz 1: Wenn der Durchschnitt von  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_s$  gleich 1 ist, dagegen der Durchschnitt von weniger als  $s$  Basisgruppen stets von 1 verschieden ist, dann ist die Gruppe das direkte Produkt von  $s$  einfachen Gruppen und hat ein nichtzyklisches Zentrum, werden eine Reihe leicht zu findender Sätze gefolgert. Nicht im Zusammenhang damit steht der bemerkenswerte Satz 15: Eine Gruppe wird genau dann von ihren abelschen Normalteilern überdeckt, wenn jeder Zentralisator Normalteiler ist. Zassenhaus.

**Coxeter, H. S. M.:** A method for proving certain abstract groups to be infinite. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 246—250 (1940).

Es wird gezeigt, daß die durch die Elemente  $R, S$  mit den Relationen  $R^3 = S^3 = (RS)^4 = (R^{-1}S^{-1}RS)^4 = 1$  erzeugte Gruppe unendlich ist (siehe dies. Zbl. 20, 207), indem für jedes  $n$  eine Faktorgruppe der Ordnung  $24n^4$  angegeben wird. Diese wird durch Umformung der Gruppe des direkten Produktes von vier zyklischen Gruppen der Ordnung  $n$  erhalten in der Form  $R^3 = S^3 = (RS)^4 = (R^{-1}S)^6 = (R^{-1}S^{-1}RS)^4 = (R^{-1}SRS^{-1}RS)^n = 1$ . J. J. Burckhardt (Zürich).

**Schmidt, O.:** Über unendliche spezielle Gruppen, Rec. math. Moscou, N. s. 8, 363—374 u. deutsch. Zusammenfassung 374—375 (1940) [Russisch].

Verf. untersucht 3 Eigenschaften, die für endliche Gruppen gleichwertig mit der Zerlegbarkeit in das direkte Produkt der  $p$ -Sylogruppen sind, und zwar: (1) Zerlegbarkeit in das direkte Produkt von  $p$ -Gruppen; (2) Normalisatorbedingung: jede echte Untergruppe ist sogar echte Untergruppe ihres Normalisators; (3) Aufsteigen der Zentralreihe bis zur ganzen Gruppe:  $1 = \mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{z}_\alpha = \mathfrak{G}$ , wobei  $\mathfrak{z}_{i+1}/\mathfrak{z}_i$  das Zentrum von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_i$  und für Limeszahlen  $\mathfrak{z}_\alpha$  die Vereinigungsgruppe aller  $\mathfrak{z}_i$  mit  $i < \alpha$  ist. Eigenschaften dieser Art wurden systematisch von R. Baer in der großen Arbeit: Nilpotent groups and their generalisations [Trans. Amer. Math. Soc. 47, 393—434 (1940); Referat folgt später] untersucht. (1), (2), (3) sind die Eigenschaften  $(P)$ ,  $(M^*)$ ,  $(Z)$  in der Tabelle am Schluß der Baerschen Arbeit. Gleichzeitig begannen die Untersuchungen von S. N. Tschernikow, nämlich: Unendliche spezielle Gruppen, Rec. math. Moscou, N. s. 6, 199—214 (1939); dies. Zbl. 22, 208; Unendliche lokal auflösbare Gruppen, Rec. math. Moscou, N. s. 7, 35—64 (1940); dies. Zbl. 23, 15; Zur Theorie der unendlichen speziellen Gruppen, Rec. math. Moscou, N. s. 7, 539—548 (1940); Referat folgt später. — Eine (nicht notwendig endliche) Gruppe, welche die Normalisatorbedingung erfüllt, nennt Verf. speziell. Diese Gruppen sind im Sinne von Baer metazyklisch (s. Baer 4.9). Satz 1: Jede Untergruppe einer speziellen Gruppe ist speziell. Baer zeigt 4.13, daß  $(M^*)$  äquivalent mit Satz 1 = Bedingung  $(M)$  ist. Satz 2, 3: In einer speziellen Gruppe bilden die Elemente endlicher Ordnung einen Normalteiler, der gleich dem direkten Produkt seiner Sylogruppen ist (Baer 3.9 und 4.10). Satz 4: Eine Gruppe mit Zentralreihe ist speziell (Baer 4.11). Satz 5 (S. N. Tschernikow): Wenn eine periodische Gruppe (d. i. eine Gruppe ohne Elemente unendlicher Ordnung) speziell ist, so ist sie lokal endlich (Baer 3.9). — In § 2 werden Gruppen, in denen die Minimalbedingung für abnehmende Untergruppenketten erfüllt ist, untersucht. Diese Gruppen sind periodisch. Nach Satz 6 sind für sie die Eigenschaften (2), (3) äquivalent. Satz 7 (S. N. Tschernikow): Spezielle Gruppen mit Minimalbedingung sind gekennzeichnet als Erweiterung eines direkten Produktes endlich vieler quasizyklischer  $p$ -Gruppen ( $p$  fest) mit einer endlichen  $p$ -Faktorgruppe ( $p$ -Gruppen, die isomorph zur additiven Gruppe der rationalen Zahlen mit  $p$ -Potenznenner mod 1 sind, heißen quasizyklisch). Eine  $p$ -Gruppe mit endlicher Faktorgruppe über Abelschen Normalteiler ist nach Satz 12 stets speziell. —



In § 3 wird eine 2-stufig metabelsche  $p$ -Gruppe, deren Zentrum 1 ist, konstruiert, und zwar dieselbe Gruppe, die Baer 3.4 angibt. *Zassenhaus* (Hamburg).

**Tschernikow, S.: Über Gruppen mit einer Sylowschen Menge.** Rec. math. Moscou, N. s. 8, 377—391 u. dtsh. Zusammenfassung 392—394 (1940) [Russisch].

Als Sylowsche Menge einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit lauter Elementen endlicher Ordnung (periodische Gruppen) wird eine jede Teilmenge  $\mathfrak{M}$  der Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  verstanden, die eine  $\mathfrak{G}$  und  $e$  enthaltende Struktur im Sinne von O. Ore bildet, in der ferner aus  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$  folgt, daß die Faktorgruppen  $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}$  keine Elemente gleicher Ordnung  $> 1$  enthalten und innerhalb deren eine Faktorgruppe sich nur dann nicht verfeinern läßt, wenn sie eine (evtl. unendliche)  $p$ -Gruppe ist. Ein Spezialfall sind die auf- und absteigenden Sylowschen Reihen. In einer periodischen Gruppe heißt  $A$  von  $B$  Sylow-trennbar, wenn es einen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{G}$  gibt, der  $A$ , aber nicht  $B$  enthält, so daß die Gruppen  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  keine Elemente gleicher Ordnung  $> 1$  enthalten. Nach dem Lemma ist in Gruppen mit Sylowscher Menge von je zwei Elementen mit teilerfremder Ordnung wenigstens eines von dem anderen Sylow-trennbar. Nach Satz 2 besitzt eine periodische Gruppe genau dann eine Sylowsche Menge, wenn von je zwei Elementen, deren Ordnungen verschiedene Primzahlen sind, wenigstens eines von dem anderen Sylow-trennbar ist. Demnach überträgt sich die Existenz einer Sylowmenge von  $\mathfrak{G}$  auf die Unter- und die Faktorgruppen. —  $A$  und  $B$  heißen Sylow-trennbar, wenn  $A$  von  $B$  und  $B$  von  $A$  Sylow-trennbar ist. Nach der Folgerung zu Satz 3 ist eine periodische Gruppe genau dann das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen, wenn je zwei Elemente, deren Ordnungen verschiedene Primzahlen sind, Sylow-trennbar sind. — Zu jeder Menge  $N$  von Primzahlen gibt es in einer beliebigen Gruppe  $\mathfrak{G}$  wenigstens eine möglichst große Untergruppe, die nur aus Elementen besteht, deren Ordnungen Potenzprodukte von Primzahlen aus  $N$  sind, die  $N$ -Sylowgruppen.  $\mathfrak{G}$  heißt Sylow-zerlegbar, wenn  $\mathfrak{G}$  sich in das direkte Produkt zweier verallgemeinerter Sylowgruppen  $\neq 1$  zerlegen läßt. Wird die Menge  $N$  aller Primteiler der Ordnungen der Elemente einer periodischen Gruppe  $\mathfrak{G}$  vermöge derjenigen Trennungsrelation  $p \Delta q$ , die mit der Existenz zweier Sylow-trennbarer Elemente der Ordnung  $p$  und  $q$  in  $\mathfrak{G}$  gleichwertig ist, in seine eindeutig bestimmten untrennbaren Komponenten  $N_1, N_2, \dots$  aufgetrennt, so ist nach Satz 3  $\mathfrak{G}$  das direkte Produkt seiner  $N_i$ -Sylowgruppen, und jede  $N_i$ -Sylowgruppe ist Sylow-unzerlegbar. Dabei wird als Auftrennung von  $N$  jede direkte Zerlegung in solche Teilmengen bezeichnet, daß Elemente aus verschiedenen Teilmengen stets der Trennungsrelation genügen. — Der Begriff der Existenz einer Sylowschen Menge wird dann verknüpft mit den Eigenschaften: lokal endlich, Minimalbedingung für absteigende Untergruppenketten, quasi-spez. = Existenz einer endlichen oder unendlichen, aufsteigenden Hauptreihe mit lauter zyklischen Faktoren, lokal quasi-spez. Ref. scheint, daß Satz 9: Zwei Sylowsche Reihen einer Gruppe sind isomorph, nicht an die Bedingung geknüpft ist, daß die Gruppe lokal quasi-spez. sei. *Zassenhaus* (Hamburg).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Miller, Harlan C.: A theorem concerning closed and compact point sets which lie in connected domains.** Bull. Amer. Math. Soc. 46, 848 (1940).

Verf. zeigt, daß in einem Raum, in dem die Mooreschen Axiome 0, 1, 2, erfüllt sind (vgl. dies. Zbl. 23, 114), folgendes Theorem gilt: Ist  $M$  eine abgeschlossene kompakte Teilmenge eines zusammenhängenden Gebietes  $D$ , so gibt es ein kompaktes Kontinuum, das  $M$  enthält und in  $D$  liegt. *L. Egyed* (Budapest).

**Blumenthal, Leonard M., and George R. Thurman: The characterization of pseudo-spherical sets.** Amer. J. Math. 62, 835—854 (1940).

Es sei  $S_{n,r}$  die Oberfläche der Kugel im Euklidischen  $E_{n+1}$  mit dem Radius  $r$ ; als Abstand je zweier Punkte von  $S_{n,r}$  sei ihr geodätischer Abstand in  $S_{n,r}$  eingeführt.



Weiter sei  $R$  ein halbmetrischer Raum (d. h. eine Menge irgendwelcher Elemente, die zu je zwei,  $p, q$  einen Abstand  $pq = qp > 0$  haben, von dem die Dreiecksungleichung nicht verlangt wird).  $R$  heißt eine Pseudo- $S_{n,r}$ -Menge, wenn  $R$  nicht abstandstreu in  $S_{n,r}$  abgebildet werden kann, obwohl dies für jedes  $(n+2)$ -Tupel von Punkten aus  $R$  der Fall ist. Verff. charakterisieren rein metrisch diese halbmetrischen Pseudo- $S_{n,r}$ -Mengen. Nöbeling (Erlangen).

**Pospišil, Bedřich: Von den Verteilungen auf Booleschen Ringen.** Math. Ann. 118, 32—40 (1941).

Einige Ergänzungen zu einer früheren Abhandlung des Verf. [Math. Ann. 117, 327 bis 355 (1940); dies. Zbl. 23, 113]. Wir beziehen uns im folgenden auf die Besprechung dieser Arbeit bzw. auf die dabei gebrauchten Bezeichnungen. Ferner schreiben wir  $|\varphi| \leq \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$ , wenn  $\varphi(j) = e$ , wo  $j$  das Intervall aller  $x$  mit  $|x| \leq \varepsilon$  ist. Es ist dann  $\varphi$  beschränkt, falls  $|\varphi| \leq \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$  gilt. Ferner sei  $\varphi_n \rightarrow 0$  gleichbedeutend mit der Existenz einer Nullfolge von  $\varepsilon_n > 0$ , für welche  $|\varphi_n| \leq \varepsilon_n$ . Eine reelle Funktion  $h$ , deren Argumente Verteilungen auf dem zugrunde gelegten Booleschen Ring  $A$  sind, heißt stetig, falls aus  $\varphi_n \rightarrow 0$  folgt  $h\varphi_n \rightarrow 0$ . Es wird gezeigt: I) Es sei  $\Phi$  eine Menge von beschränkten Verteilungen auf  $A$ , die alle beschränkten, stetigen Verteilungen auf  $A$  und alle Summen sowie Produkte ihrer Elemente enthält; ferner sei  $h$  eine auf  $\Phi$  erklärte reelle Homomorphie, d. h. aus  $\varphi_0 \in \varphi_1 + \varphi_2$  bzw. aus  $\varphi_0 \in \varphi_1 \cdot \varphi_2$  folgt  $h\varphi_0 = h\varphi_1 + h\varphi_2$  bzw.  $h\varphi_0 = h\varphi_1 \cdot h\varphi_2$ . Dann sind folgende vier Bedingungen gleichwertig: 1)  $h$  ist stetig; 2) ist  $g$  eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen und  $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi$ ,  $\varphi_0 \in g(\varphi_1)$ , so ist auch  $h\varphi_0 = g(h\varphi_1)$ ; 3) ist  $g$  eine stetige Funktion von  $N$  reellen Veränderlichen und  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N \in \Phi$ ,  $\varphi_0 \in g(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ , so ist  $h\varphi_0 = g(h\varphi_1, \dots, h\varphi_N)$ ; 4) ist  $j$  eine offene Umgebung von  $h\varphi$  mit  $\varphi \in \Phi$ , so ist  $\varphi(j)$  von Null verschieden. — Die 4 Bedingungen bleiben gleichwertig, wenn man darin an Stelle von  $\Phi, \varphi, h$  setzt  $F, f, k$ , wo  $F$  die Menge der beschränkten meßbaren Funktionen  $f$  und  $k$  eine auf  $F$  erklärte (reelle) Homomorphie ist [d. h.  $k(f_1 + f_2) = k \cdot f_1 + k \cdot f_2$ ,  $k(f_1 \cdot f_2) = k f_1 \cdot k f_2$ ]. — II) Als Norm  $\|\varphi\|$  von  $\varphi$  werde erklärt die untere Grenze aller  $M > 0$  mit  $|\varphi| \leq M$ . Es sei  $\Psi$  die Gesamtheit aller beschränkten, stetigen Verteilungen auf  $A$ . Eine Isomorphie von  $\Psi$  mit einer Teilmenge  $C$  des Ringes der beschränkten Zahlenfolgen, bei welcher die Norm unverändert bleibt, existiert dann und nur dann, wenn  $A$  separabel ist. Dabei heißt (der Boolesche Ring)  $A$  separabel, falls es eine abzählbare Menge  $\Pi$  von Primidealen in  $A$  gibt derart, daß für jedes  $a \in A$ , mit  $a \neq 0$ , ein  $\pi \in \Pi$  vorhanden ist, in welchem  $a$  nicht enthalten ist. Insbesondere wird gezeigt, daß der nach dem Ideal  $\beta$  aller Mengen erster Kategorie reduzierte Ring (Mengenkörper)  $B$  aller Mengen mit der Baireschen Eigenschaft in einem euklidischen Raum separabel ist; dabei ist also  $A = B/\beta$ . (Es besagt  $b \in B$ , daß  $b = o + z$ , wo  $o$  offen und  $z \in \beta$ ). — Schließlich sei  $\mathfrak{E}$  ein Mengenkörper,  $E$  die Vereinigung aller Mengen aus  $\mathfrak{E}$ ,  $E \in \mathfrak{E}$ ,  $e$  ein Ideal in  $\mathfrak{E}$ , dessen Elemente für Nullmengen genommen werden mögen. Es sei  $\mathcal{A} = \mathfrak{E}/e$ . Die beschränkten, in  $\mathfrak{E}$  meßbaren Funktionen mögen einen Ring  $R$  bilden. Für  $(R)$  und  $\mathcal{A}$  gilt der für  $\Phi$  und  $A$  vorstehend genannte Satz; dabei entsteht  $(R)$  aus  $R$ , indem man einem Element von  $(R)$  alle Elemente von  $R$  entsprechen läßt, wenn alle Charaktere von  $R$  für diese Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist  $\mathcal{A}$  nicht separabel, wenn  $\mathfrak{E}$  der Körper aller Mengen von ganzen Zahlen und  $e$  das Ideal aller endlichen solchen Mengen ist (wenn also die meßbaren Funktionen die beschränkten Zahlenfolgen sind). *Haupt.*

**Pospišil, Bedřich: Eine Bemerkung über stetige Verteilungen.** Čas. mat. fys. 70, 68—72 (1941).

Zusatzbemerkung zu den beiden früheren Arbeiten des Verf. [Math. Ann. 117, 327 bis 355 (1940); dies. Zbl. 23, 113 und vorstehend besprochene Arbeit], auf deren Besprechungen wir uns hinsichtlich der Bezeichnungen beziehen müssen. Es sei (wieder)  $\Phi$  die Gesamtheit aller beschränkten, stetigen Verteilungen auf dem (Booleschen) Ring  $A$ . Es wird gezeigt: 1) eine reelle Homomorphie von  $\Phi$  ist immer stetig und ein Charakter von  $\Phi$ ; 2) die Norm in  $\Phi$  ist durch die Algebra in  $\Phi$  vollständig bestimmt; dabei wird



unter der Algebra in  $\Phi$  verstanden die Regel, vermöge derer gewissen Paaren  $\varphi_1, \varphi_2$  eine Summe  $\varphi_1 + \varphi_2$  und ein Produkt  $\varphi_1 \varphi_2$  in  $\Phi$  zugeordnet ist. Man erkläre nun  $\Phi$  als metrischen Raum mit der Entfernung  $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \overline{\text{Grenze}} |h\varphi_1 - h\varphi_2|$ , so daß also die Metrik durch die Algebra in  $\Phi$  bestimmt ist. Umgekehrt ist nun aber auch die Algebra in  $\Phi$  durch die Metrik in  $\Phi$  völlig bestimmt. Ist  $H$  die vollständige Hülle des (metrischen) Raumes  $\Phi$ , so wird durch die Metrik von  $H$ , also durch die Algebra von  $H$ , der Ring  $A$  eindeutig bestimmt. — Einige Folgerungen. *Haupt.*

**Giraud, Georges:** Sur quelques questions relatives aux intégrales convergentes et aux intégrales divergentes. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 133—142 (1940).

Zu jeder vorgegebenen Funktion  $\varphi(x) > 0$ , die mit  $x$  unbegrenzt wächst, kann man immer zwei positive Funktionen  $f$  und  $g \leq \varphi f$  derart finden, daß  $\int_1^\infty f(t) dt$  existiert, während  $\int_1^\infty g(t) dt$  nicht existiert. Verf. löst diese Aufgabe unter der Voraussetzung, daß  $f$  und  $g$  gewissen Nebenbedingungen genügen, nämlich: a)  $f$  und  $f/g$  nehmen ab; b)  $f x^\nu$  nimmt ab ( $\nu < 1$  eine beliebige positive Konstante), oder b')  $g$  nimmt ab, oder b'')  $g x^h$  nimmt ab ( $0 < h < 1$ ), oder b''')  $g x^h$  nimmt ab,  $f x^k$  wächst ( $0 < h < 1 < k$ ) usw. Auf diese Weise wird zugleich die Verträglichkeit einer gewissen Menge von Bedingungen für  $f$  und  $g$  gezeigt. Die Beweise beruhen auf Eigenschaften von gewissen verallgemeinerten Mitteln einer willkürlichen Funktion  $f(x)$ :

$$\frac{1}{\Gamma(q) \omega(x)} \int_0^x f(t) \log^{q-1} \frac{\omega(x)}{\omega(t)} d\omega(t) \quad (x > 0),$$

wo  $\omega(x)$  eine vorgegebene wachsende Funktion ist mit  $\omega(0) = 0$ ,  $q$  ein positiver Parameter, und das Integral im Sinne von Stieltjes genommen wird. *Tullio Viola.*

**Sólyi, A.:** Über Funktionen, die ein endliches Dirichletsches Integral haben. Acta Sci. Math. Szeged 10, 48—54 (1941).

Es sei  $T$  ein Bereich des  $n$ -dimensionalen Raumes  $R_n$  der  $(x_1, \dots, x_n)$ , ferner  $g(x_1, \dots, x_n)$  quadratisch (Lebesgue-) integrierbar in  $R_n$ . Schließlich sei

$$\int_T [D_\alpha^h(g)]^2 dx_1 \dots dx_n$$

(gleichmäßig) beschränkt für alle  $h$ ; dabei ist gesetzt:

$$D_\alpha^h(g) = \frac{1}{h} [g(x_1, \dots, x_\alpha + h, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)], \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Gefragt wird nach der Existenz der partiellen Ableitungen  $g'_\alpha$  von  $g$  nach  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  sowie nach denjenigen Exponenten  $\nu > 2$ , für welche  $\int_T |g|^\nu dx_1 \dots dx_n$  endlich bleibt

(sog. Integrabilitätsexponenten). Es wird gezeigt: Die  $g'_\alpha$  existieren fast überall in  $T$  und sind quadratisch integrierbar. Die  $D_\alpha^h(g)$  streben im Mittel gegen  $g'_\alpha$ , d. h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_T [D_\alpha^h(g) - g'_\alpha]^2 dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Die Integrabilitätsexponenten sind:  $\nu$  beliebig für  $n = 2$ ;  $\nu < \frac{2n}{n-2}$  für  $n \geq 3$ . Für  $n = 1$  ist  $g$  stetig. Die Schranke  $\frac{2n}{n-2}$  kann nicht vergrößert werden. Eine Erledigung der Frage, inwieweit  $\frac{2n}{n-2}$  selbst Integrabilitätsexponent sei, ist bisher nicht gelungen.

— Mittels Entwicklung von  $g$  in eine mehrfache Fourierreihe wird zunächst der Fall einer mit der Periode  $2\pi$  im Periodenwürfel für alle  $x$ , periodischen Funktion  $g$  erledigt und der allgemeine Fall mit Hilfe einer geeigneten Fortsetzung darauf zurückgeführt.

*Haupt (Erlangen).*



**Liberman, Joseph:** Théorème de Denjoy sur la dérivée d'une fonction arbitraire par rapport à une fonction continue. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 221—235 (1941).

$f(x)$  und  $\varphi(x)$  seien im Intervall  $(0, 1)$  definiert und endlich. Man setzt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{D}_{\varphi}^{+} f(x)}{\overline{D}_{\varphi}^{-} f(x)} &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{\varphi(x_1) - \varphi(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \varphi(x_1) > \varphi(x), \\ \varphi(x_1) < \varphi(x), \end{cases} \\ \frac{\underline{D}_{\varphi}^{+} f(x)}{\underline{D}_{\varphi}^{-} f(x)} &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{\varphi(x_1) - \varphi(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \varphi(x_1) > \varphi(x), \\ \varphi(x_1) < \varphi(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Die Gesamtheit  $E_1$  der Unstetigkeitspunkte von  $\varphi(x)$  genüge der Beziehung  $\text{Maß}_{\varphi}(E_1) = 0$ . Ziel des Verf. ist der Beweis dafür, daß bis auf eine Menge  $E$ , für die  $\text{Maß}_{\varphi}(E) = 0$  gilt, die eben angeführten Ableitungen immer existieren und einer der folgenden Beziehungen genügen

- 1)  $\overline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = \overline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = +\infty$ ,  $\underline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = \underline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = -\infty$ ;
- 2)  $\underline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = -\infty$ ,  $-\infty < \underline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{D}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$ ,  $\overline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = +\infty$ ;
- 3)  $\overline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = +\infty$ ,  $-\infty < \overline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = \underline{D}_{\varphi}^{-} f(x) < +\infty$ ,  $\underline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = -\infty$ ;
- 4)  $-\infty < \underline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = \overline{D}_{\varphi}^{-} f(x) = \underline{D}_{\varphi}^{+} f(x) = \overline{D}_{\varphi}^{+} f(x) < +\infty$ .

G. Scorza-Dragoni (Padova).

**Maximoff, Isaie:** Sur les fonctions dérivées. Bull. Sci. math., II. s. 64, 116—121 (1940).

Durch geeignete Verallgemeinerung der Definition der approximativ stetigen Funktionen wird der bekannte grundlegende Satz von A. Denjoy auf endliche Funktionen ausgedehnt: Jede beschränkte, in jedem Punkt approximativ stetige Funktion ist eine abgeleitete Funktion.

Tullio Viola (Roma).

**Perlin, Irwin E.:** Indefinitely differentiable functions with prescribed least upper bounds. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 272—273 (1940).

Ist  $f(x)$  eine reelle, in  $a \leq x \leq b$  unendlich oft differenzierbare Funktion und setzt man  $M_n = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n)}(x)|$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , so müssen die  $M_n$  gewissen Ungleichungen genügen [vgl. z. B. Ö. Ore, Trans. Amer. Math. Soc. 43, 321—326 (1938); dies. Zbl. 18, 395]. Für den Fall  $a = 0, b = c$  gibt Verf. die folgende an:  $M_1 \leq 2M_0c^{-1} + 2^{-1}M_2c$ , die ein wenig besser ist als die entsprechende Oresche. — Umgekehrt gibt Verf. so dann eine hinreichende Bedingung dafür, daß zu gegebenen  $M_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , eine in  $0 \leq x \leq q$  unendlich oft differenzierbare Funktion  $F(x)$  gehört derart, daß  $M_n = \max_{0 \leq x \leq q} |F^{(n)}(x)|$ . Diese Bedingung ist:  $M_n q^n$  fällt monoton. Ein zugehöriges  $F(x)$

ist dann:  $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$  mit  $S_{\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{M_{\nu+j} q^j}{j!}$ , wobei  $|F^{(n)}(x)| \leq F^{(n)}(q) = M_n$ ,

$0 \leq x \leq q$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

Haupt (Erlangen).

## Analysis.

### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

**Achyeser, N. I., und M. G. Krein:** Über einige Quadraturformeln von P. Tschebyscheff und A. Markoff. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 15—28 (1940) [Russisch].

La fonction  $q(x)$  définie dans  $(a, b)$  admet la formule de quadrature de Markoff d'ordre  $2n - 2$  si les intégrales  $c_i = \int_a^b x^i q(x) dx$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n - 2, c_0 = 0$ ), existent et s'il y a des nombres  $a \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_{n-1} \leq b$ ,  $L \neq 0$ , tels que pour chaque polynome  $P_{2n-2}(x)$  de degré  $\leq 2n - 2$  on ait

$$\int_a^b P_{2n-2}(x) q(x) dx = L \sum_{i=1}^{n-1} [P_{2n-2}(\alpha_i) - P_{2n-2}(\beta_i)].$$



En supposant que les intégrales  $\int_{-\infty}^{\infty} x^{k+1} q(x) dx = (k+1)s_k$ ,  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ , existent ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2$ ), les au. démontrent que la condition nécessaire et suffisante de l'existence de la formule de Markoff est que la forme quadratique  $\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k$  soit positivement ou négativement définie. Considérations analogues pour la formule de Tchebycheff.

N. Obreschkoff (Sofia).

**Koehler, Fulton: Systems of orthogonal polynomials on certain algebraic curves.** Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 345—351 (1940).

Als Integrationsbereich für die Untersuchungen wird der Umfang  $c$  des Quadrates, das durch die entsprechenden Strecken der Geraden  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  begrenzt wird, genommen; als Basis zur Herstellung einer Folge orthogonaler Polynome wird benützt

$$(A) \quad 1, x+y, x-y, xy, x^2+y^2, x^2-y^2, \dots, x^{n-1}y + xy^{n-1}, x^{n-1}y - xy^{n-1}, \\ x^n + y^n, x^n - y^n, \dots,$$

die die Bedingungen linearer Unabhängigkeit auf  $c$  erfüllen. Wegen der Identität  $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \equiv 0$  läßt sich dann jedes Polynom auf  $C$  als Linearkombination aus (A) ausdrücken. Ist  $\varrho(x, y)$  eine fast überall auf  $C$  positive Funktion, so kann man die Orthogonalisierung in bekannter Weise durchführen; die orthogonalen Polynome  $p_{nk}(x, y)$  seien so bezeichnet, daß  $n$  den Grad des Polynomes bedeute und mit  $k = 1, 2, 3, 4$  darauf hingewiesen wird, ob noch das 1., 2., 3. oder 4. Polynom  $n$ -ten Grades obiger Ausgangsfolge (A) auftritt. Bezeichnet man mit  $P_n[x; f(x)]$  das Polynom  $n$ -ten Grades, das im Orthogonalsystem im Intervall  $[-1, 1]$  mit dem Gewicht  $f(x)$  auftritt, so kann man die folgenden Sätze zeigen: 1. Ist die Gewichtsfunktion  $\varrho(x, y)$  so beschaffen, daß die entsprechenden Polynome auf jeder abgeschlossenen Punktfolge von  $C$ , die keinen Eckpunkt enthält, gleichmäßig beschränkt sind, ist ferner  $\varrho\varphi$  integrabel auf  $C$  und  $\varrho\varphi^2$  integrabel in irgendeiner Nachbarschaft eines Eckpunktes, dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \varrho(u, v) \varphi(u, v) p_{nk}(u, v) ds = 0$ . 2. Wenn  $\varrho(x, y) \equiv \varrho(-x, -y) \equiv \varrho(y, x)$

auf allen Punkten von  $C$  ist, und wenn die Polynome  $P_n[x; \varrho(x, 1)]$  gleichmäßig beschränkt für alle  $n$  auf jeder inneren abgeschlossenen Teilmenge von  $[-1, 1]$  sind, dann sind die Polynome  $p_{nk}(x, y)$  gleichmäßig beschränkt für alle  $n$  und  $k$  auf jeder abgeschlossenen Punktfolge von  $C$ , die die Eckpunkte nicht enthält. 3. Sind für  $\varrho(x, y)$  die Voraussetzungen von 1. erfüllt, ist  $(x, y)$  ein Punkt von  $C$ , aber kein Eckpunkt, ist für  $\varphi(x, y)$  die Voraussetzung wie unter 1. erfüllt, ist endlich

$$\varrho(u, v) [\varphi(u, v) - \varphi(x, y)] / [(u-x) + (v-y)]$$

auf irgendeiner Nachbarschaft von  $(x, y)$  auf  $C$  integrabel, dann konvergiert die Reihe  $\sum \sum c_{nk} p_{nk}(x, y)$  im Punkte  $(x, y)$  zu dem Werte  $\varphi(x, y)$ . Schließlich werden noch die Voraussetzungen einer Abschätzung von der Form  $|S_{nk} - \varphi(x, y)| \leq \frac{K \ln n}{n^2} \omega(1/n)$  angegeben. Kurz wird darauf hingewiesen, daß ähnliche Sätze sich zeigen ließen, wenn man als Bereich  $C$  die beiden Mittelsenkrechten obigen Quadrates oder die Ränder eines Kreisringes nähme.

F. Knoll (Wien).

## Reihen:

**Agnew, Ralph Palmer: On rearrangements of series.** Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 797—799 (1940).

Die Menge  $E$  der Umordnungen der natürlichen Zahlenreihe wird mit Hilfe der Distanz von Fréchet metrisiert und gezeigt: 1. Die Teilmenge derjenigen Umordnungen, die, auf eine bedingt konvergente Reihe reeller oder komplexer Zahlen ausgeübt, Reihen gleichmäßig beschränkter Teilsummen ergeben, ist eine Menge 1. Kategorie. 2. Die Menge  $E$  selbst ist eine Menge 2. Kategorie. H. Hadwiger (Bern).

**Hornich, Hans:** Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen. *Mh. Math. Phys.* **49**, 316—320 (1941).

Verf. untersucht die Menge  $N$  der Zahlen, die sich als Summe von endlich oder unendlich vielen verschiedenen Elementen  $a_i$  einer absolut konvergenten reellen Zahlenreihe darstellen lassen. Es ist keine wesentliche Beschränkung, anzunehmen, daß  $a_i > 0$ ,  $a_{i+1} \leq a_i$  und  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 1$  ist. Zunächst wird festgestellt, daß  $N$  abgeschlossen und in sich dicht (also perfekt) ist. Die in bezug auf das Intervall  $(0, 1)$  komplementäre Menge zerfällt in höchstens abzählbar viele offene Intervalle. Bei der weitergehenden Klärung der Struktur von  $N$  spielen die Hilfszahlen

$$\sigma_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots; \sigma_0 = 1)$$

eine entscheidende Rolle. Verf. zeigt u. a.: Wenn  $a_k > \sigma_k$  für alle  $k$ , so enthält  $N$  kein Intervall und hat das Maß  $\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \sigma_k$ ; dagegen ist die Bedingung  $a_k \leq \sigma_k$  für alle  $k$  notwendig und hinreichend dafür, daß  $N$  mit dem gesamten Intervall  $(0, 1)$  identisch wird. Das Maß der Menge  $N$  ist stets höchstens gleich  $\inf 2^k \sigma_k$ .

*H. Hadwiger* (Bern).

**Agnew, Ralph Palmer:** Tauberian conditions. *Ann. of Math.*, II. s. **42**, 293—308 (1941).

Verf. untersucht Taubersätze für das  $C_1$ -Verfahren, richtet jedoch das Hauptaugenmerk auf die verschiedenen Klassen von Umkehrbedingungen und deren gegenseitige Beziehungen. Im wesentlichen werden drei Reihenklassen  $T$ ,  $T^*$  und  $T''_E$  betrachtet. Eine Reihe  $\sum a_n$  mit den Teilsummen  $s_n$  gehört zur Klasse  $T$ , wenn es  $K, \theta, \lambda$  und  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  gibt, so daß  $K > 0$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda > 1$  ist und für alle  $k$  von einer Stelle an  $na_n$  in  $S(K, \theta, \psi_k)$  liegt für  $k \leq n < \lambda k$ . Dabei ist  $S(K, \theta, \psi)$  der Sektor der komplexen Zahlenebene, dessen Punkte sich in der Form  $z = -K e^{i\psi} + \rho e^{i(\psi + \varphi)}$  schreiben lassen mit  $\rho \geq 0$ ,  $-\theta \leq \varphi \leq \theta$ . Die Klasse  $T$  enthält unter anderem alle Reihen, die der Hardyschen Bedingung  $n|a_n| < M$ , der Landauschen Bedingung  $na_n > -M$  ( $M > 0$ ), der Lukacsschen Winkelraumbedingung [vgl. *Arch. Math. Phys.* (3), **23**, 367—368 (1915)] und der Lückenbedingung  $a_n = 0$  für  $n \neq n_\nu$ ,  $n_{\nu+1} > \lambda n_\nu$ ,  $\lambda > 1$  genügen. Weitere Eigenschaften von  $T$  werden festgestellt. Wegen der Definition der Klasse  $T^*$  sei auf die Arbeit selbst verwiesen; es handelt sich dabei um eine weite (komplexe) Verallgemeinerung des Begriffs der langsam abfallenden Folgen von R. Schmidt [*Math. Z.* **22**, 89—152 (1925)]. Die Klasse  $T$  ist in  $T^*$  enthalten, und es gilt der Umkehrsatz: Aus  $\sum a_n \in T^*$  und  $C_1\text{-}\sum a_n = s$  folgt  $\sum a_n = s$ . —  $\sum a_n$  soll zur Klasse  $T''_E$  ( $E > 0$ ) gehören, wenn für  $s_n$  die folgende Bedingung erfüllt ist: es gibt die Folgen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  ( $0 < \alpha_k < \beta_k$ ,  $k\alpha_k \rightarrow \infty$ ), so daß  $\limsup_{k \rightarrow \infty} (\beta_k + \alpha_k)/(\beta_k - \alpha_k) \equiv F < \infty$  ist, und einen Index  $k_0$ , so daß für  $k > k_0$  Realteil  $(s_p e^{i\theta_k}) > -E + \rho |s_k|$  ist für  $k\alpha_k \leq p \leq k\beta_k$  mit einer geeigneten Konstanten  $\rho > 0$  und Folge  $\theta_k$  (reell). Verschiedene Unterklassen von  $T''_E$  werden untersucht. Es ist  $T \subset T^* \subset P \subset T''_E$ , wobei  $P$  die Klasse der der Bedingung  $T$  in Definition 2, 2 auf S. 244—245 der Arbeit General Tauberian Theorems von H. R. Pitt [*Proc. London Math. Soc.* (2), **44**, 243 bis 288 (1938); dies. Zbl. **19**, 109] genügenden Reihen  $\sum a_n$  ist. Es gilt der folgende Taubersche Oszillationssatz: Aus  $\sum a_n \in T''_E$  folgt  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |s_k| \leq (E + F \limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n|)/\rho$ , wobei  $\sigma_n = (s_1 + \dots + s_n)/n$  ist. Verf. weist darauf hin, daß der Beweis besonders kurz und einfacher ist als die Beweise der zu den engeren Klassen  $T$  oder  $T^*$  gehörigen Umkehrsätze. Dies ist ein Zeichen dafür, daß in der richtigen Weise verallgemeinert wurde.

*Meyer-König* (Stuttgart).

**Maruyama, Gisirô:** Summability of Fourier series. *Tôhoku Math. J.* **47**, 255—260 (1940).

Sei  $f(x)$  eine in  $(0, 2\pi)$   $L$ -integrierbare Funktion und seien  $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$  die Teilsummen ihrer Fourierschen Reihe. Verf. beweist: Ist  $0 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n < \dots$



eine Folge reeller Zahlen mit den Eigenschaften

$$(1) \quad p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n \leq 0, \quad (2) \quad p_n/(p_n - p_{n-1}) = O(n),$$

dann gilt fast überall in  $(0, 2\pi)$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} [s_{[p_0]}(x) + s_{[p_1]}(x) + \dots + s_{[p_n]}(x)] = f(x).$$

Verf. zeigt, daß es Folgen gibt, für die (1) und  $p_n/(p_n - p_{n-1}) = o(n)$  zutrifft und für die (3) nicht gilt.

L. Cesari (Pisa).

**Randels, W. C.:** On the absolute summability of Fourier series. 3. Duke math. J. 7, 204—207 (1940).

The author proves the following theorem: If  $f(x)$  is such that at every point  $y$  on the closed interval  $(-\pi, \pi)$  there are a function  $g_y(x)$  and a  $\delta > 0$  such that  $g_y(x) = f(x)$  for all  $x$  in  $(y - \delta, y + \delta)$  and the Fourier series of  $g_y(x)$  is absolutely summable  $[c, 1]$ , then the Fourier series of  $f(x)$  is absolutely summable  $[c, 1]$  on  $(-\pi, \pi)$ . This is an analogue of Wiener's theorem on absolute convergence. Izumi.

**Kawata, Tatsuo:** The Fourier series of the characteristic function of a probability distribution. Tôhoku Math. J. 47, 121—125 (1940).

Es wird gezeigt, daß die Fouriersche Reihe einer Funktion, die durch periodische Fortsetzung des auf  $-R \leq t \leq R$  fallenden Abschnitts von  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dV(x)$  mit symmetrischer Verteilungsfunktion  $V(x)$  entsteht, bei konvergentem  $\int_{-\infty}^{+\infty} \log^k x dV(x)$  für  $k = 1$  sicherlich, für  $k < 1$  nur eventuell absolut konvergiert.

<sup>1</sup> v. Stachó.

### Dirichletsche Reihen:

**Petersson, Hans:** Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. III. Math. Ann. 117, 277—300 (1940).

Im zweiten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. 22, 129) wurden, unter  $Q$  eine beliebige natürliche Zahl verstanden, die Dirichletreihen untersucht, die, zu einem bestimmten Teiler  $t$  von  $Q$  gehörig, ganzen Spitzenformen der Stufe  $Q$  zugeordnet sind und eine Eulersche Produktentwicklung hinsichtlich der nicht in  $Q$  aufgehenden Primzahlen besitzen. Im vorliegenden dritten Teil wird mittels elementarer Methoden die Bauart der von den Primteilern der Stufe herührenden Bestandteile der Eulerprodukte bestimmt. Sei  $H(s)$  eine Dirichletreihe, der eine Modulform  $\varphi(c)$  der Dimension  $-r$  der Stufe  $Q$  vom Teiler  $t$  zugeordnet ist, die eine Eulerentwicklung

$$H(s) = t^{-s} H^{(Q)}(s) \prod_{(p, Q)=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c(p^\nu) p^{-\nu s} \quad (c(1) = 1)$$

haben, wo in

$$H^{(Q)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

keine  $n$  vorkommen, die durch nicht in  $Q$  aufgehende Primfaktoren teilbar sind. Es folgt dann (siehe Teil II), daß genauer

$$(1) \quad H(s) = t^{-s} K(s) \prod_{(p, Q)=1} \left( 1 - \frac{\omega(p)}{p^s} + \frac{p^{r-1} \varepsilon(p)}{p^{2s}} \right)^{-1},$$

$K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$  (\* bedeute  $(m, \frac{Q}{t}) = (m, p) = 1$  für  $(p, Q) > 1$ ) gilt.  $t^{-s} \Pi$  hängt dabei nur von  $Q, t$ , dem Charakter  $\varepsilon \bmod Q$ , zu dem  $\varphi$  gehört, und den Eigenwerten  $\omega(n)$  der Form  $\varphi(\tau)$  bei den Heckschen Operatoren  $T_n$  ab. Alle diese  $H(s)$  bilden eine lineare Schar  $\mathcal{S}(t, \varepsilon, Q, \omega)$ , die durch  $H(s) \rightarrow K(s)$  linear-isomorph abgebildet wird. Es wird nun gezeigt, daß sich jedes  $K(s)$  linear mit konstanten Koeffizienten aus einem endlichen System von Produkten der Gestalt

$$(2) \quad q_1^{-(\nu_1-1)s} \left( 1 - \frac{\alpha_1}{q_1^s} \right)^{-\nu_1} q_2^{-(\nu_2-1)s} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{q_2^s} \right)^{-\nu_2} \dots q_h^{-(\nu_h-1)s} \left( 1 - \frac{\alpha_h}{q_h^s} \right)^{-\nu_h}$$

zusammensetzen läßt, wo  $q_1, N, \dots, q_h$  die verschiedenen, nicht in  $Q/t$  aufgehenden Primteiler von  $t$  sind, für jedes  $\alpha_i$  eine feste, endliche Anzahl von verschiedenen komplexen Zahlen einzusetzen ist und  $\nu_i$  bei festem  $i$  die natürlichen Zahlen bis zu einem nur von  $q_i$  und  $\alpha_i$  abhängigen Höchstwert  $N(q_i, \alpha_i)$  durchläuft. Die  $\alpha_i$  sind die charakteristischen Wurzeln einer gewissen

linearen Transformation  $V_i$ , die eine gewisse, aus der Schar der  $K(s)$  abgeleitete Linearschar in sich überführt; sie kommen auch unter den charakteristischen Wurzeln der linearen Transformation vor, welche der Hecksche Operator  $T_{q_i}^n$  in der Schar der  $K(s)$  erzeugt.  $N(q_i, \alpha_i)$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha_i$  der Minimalgleichung von  $V_i$ . — I. a. ist nicht zu erwarten, daß alle Produkte (2) selber unter den  $K(s)$  vorkommen. Immerhin trifft das für  $h = 1$  zu; die Produkte (1) bilden dann eine Basis für die Schar der  $K(s)$ . Es bestehen nämlich lineare Relationen zwischen den Produkten (2). Für das in der Überschrift der Arbeit genannte Problem ergibt sich schließlich folgende Lösung: Hat eine Dirichletreihe  $D(s)$ , die einer ganzen Modulform der Stufe  $Q$  und der ganzen Dimension  $-r$  entspricht, ein Eulerprodukt hinsichtlich der Primzahlen  $(p, Q) = 1$ , so läßt sie sich linear mit konstanten Koeffizienten aus endlich vielen Dirichletreihen mit vollständigen Eulerentwicklungen zusammensetzen. Die Teilprodukte, die sich auf die  $p$  mit  $(p, Q) = 1$  beziehen, stimmen bei diesen Reihen überein, während die Teilprodukte, die sich auf die Primfaktoren von  $Q$  beziehen, die Gestalt (2) haben. Es ist nicht gesagt, daß diesen Reihen Modulformen der Stufe  $Q$  entsprechen, indessen trifft dies zu, wenn  $Q$  eine Primzahlpotenz ist. — Es wird schließlich ein explizites Konstruktionsverfahren für die Bestimmung einer Basis von  $S(t, \varepsilon, Q, w)$  durch die Heckschen Umsetzungsmatrizen  $\lambda(q_i)$ ;  $i = 1, 2, \dots, h$  angegeben. — Unabhängig von der Herkunft der Schar der  $K(s)$  von den Modulformen kann man zu vorgegebenen  $h$  Primzahlen  $q_1, \dots, q_h$  und zu vorgegebenem Rang  $\mu$  Scharen  $\mathfrak{B}$  von Dirichletreihen betrachten. Nur soll mit  $K(s) = \sum^* a_m m^{-s}$  auch  $K(s) | V_i = \sum^* a_m q_i m^{-s}$  in  $\mathfrak{B}$  enthalten sein. Man kann dann noch die  $h$  Umsetzungsmatrizen  $\lambda(q_i)$  vom Grade  $\mu$  vorgeben; sie müssen paarweise vertauschbar sein und einen maximalen Ring bilden. Für  $\mu = h = 2$  existiert immer eine Schar, deren Basis explizit angegeben wird. Im allgemeinen Fall muß, um die Existenz von  $\mathfrak{B}$  zu sichern, noch verlangt

werden, daß ein Vektor  $\alpha$  und  $\mu$  Zahlen  $m_i = \prod_{j=1}^h q_j^{k_{ji}}$  existieren, so daß die Vektoren  $\prod_{j=1}^h \lambda(q_j)^{k_{ji}} \alpha$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) linear unabhängig sind. Beweise und Konstruktionsverfahren gelten wörtlich für diesen allgemeineren Fall. Deuring (Jena).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

**Fréchet, Maurice:** Conditions d'existence de systèmes d'événements associés à certaines probabilités. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 51—62 (1940).

Considérons un système composé d'un nombre fini fixe d'événements fortuits  $A_1, \dots, A_m$  définis sur la même catégorie d'épreuves. On peut introduire des probabilités de différentes espèces relatives au concours de ces phénomènes. Par exemple, il y a une probabilité relative au concours d'un certain nombre d'événements  $A_i$ ; il y a une probabilité pour qu'un certain nombre de ces événements se présente tandisque, pour des valeurs donnés  $i, h, \dots$  des indices, les événements „non  $A_i$ “, „non  $A_h$ “, ... se présentent; il y a une probabilité du concours de  $r$  et  $r$  seulement des événements  $A_1, \dots, A_m$  et une probabilité d'au moins  $r$  de ces événements. L'auteur considère les relations entre ces différentes espèces de probabilités et il déduit des conditions qui doivent être satisfaites par un système de nombres réels, pour que ce système puisse être regardé comme un système de probabilités d'espèce donnée relatives aux événements  $A_1, \dots, A_m$ .

B. Hostinský (Brünn).

**Hadwiger, H.:** Bemerkung zum Problem des Ruins beim Spiele. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 40, 41—44 (1940).

Sei  $x$  das Anfangsvermögen eines Spielers, und  $p_n(x)$  sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler  $n$  Spiele hintereinander spielen kann, ohne ruiniert zu werden.  $p_n(x)$  genügt den Beziehungen  $p_0(x) = 1$  ( $x > 0$ ),  $p_n(x) = \frac{p_{n-1}(x+\alpha) + p_{n-1}(x-\beta)}{2}$  ( $x > 0$ ), wo  $\alpha$  der eventuelle Gewinn ist und  $\beta$  den eventuellen Verlust mit gleicher Wahrscheinlichkeit bei jedem Spiele darstellt. Es sei  $p_n(x) = p(u, t)$  mit  $u = x\varepsilon$  und  $t = n\tau$ , wobei  $\varepsilon$  die Geldeinheit und  $\tau$  die Dauer eines Spieles ist. Aus der Funktionalgleichung  $p(u, t + \tau) = \frac{1}{2}[p((x+\alpha)\varepsilon, t) + p((x-\beta)\varepsilon, t)]$  für kleine  $\varepsilon$  und  $\tau$  folgt die partielle Differentialgleichung  $\frac{\partial p}{\partial t} = A \frac{\partial p}{\partial u} + B \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}$  mit den Randbedingungen  $p(u, 0) = 1$  ( $u > 0$ );



$p(0, t) = 0$  ( $t > 0$ ). Dabei bedeuten  $A = \frac{\alpha - \beta}{2} \frac{\varepsilon}{\tau}$ ,  $B = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tau}$ . Man kann unmittelbar sehen, daß die drei Fälle  $\alpha > \beta$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha < \beta$  asymptotisch völlig verschieden sind.

**Sternberg, Wolfgang:** The general limit theorem in the theory of probability. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 292—298 (1940).

Soient  $x_1, x_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes dont  $V_1, V_2, \dots$  sont les fonctions de distribution. Posons

$$\int \xi dV_i(\xi) = a_i, \quad \int (\xi - a_i)^2 dV_i(\xi) = b_i, \quad \int |\xi - a_i|^3 dV_i(\xi) = c_i,$$

$$\varphi(x/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt.$$

Un nombre positif  $\varepsilon$  étant donné, on peut trouver un autre nombre positif  $\delta$  tel que l'on ait, uniformément par rapport à  $x$ ,  $|W_n(x) - \varphi(x/\sqrt{2})| < \varepsilon$ , si  $W_i(x)$  est la fonction de distribution pour la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_i$  et si les conditions  $c_i/b_i < \delta$  sont satisfaites ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). L'auteur donne la démonstration de ce théorème, avec quelques compléments, en s'inspirant de la méthode employée par A. Khintchine (Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933; ce Zbl. 7, 216) dans les cas où la propriété asymptotique se démontre sous des hypothèses plus générales.

B. Hostinský (Brünn).

**Gnedenko, B.:** To the theory of limiting theorems for sums of independent random variables. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 181—227 u. engl. Zusammenfassung 227—232 [Russisch].

**Gnedenko, B.:** To the theory of limiting theorems for sums of independent random variables. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 643—647 [Russisch].

Une variable aléatoire  $x$  obéit à une loi indéfiniment divisible, si elle est égale à une somme de  $n$  variables indépendantes ( $n$  étant un entier) dont chacune dépend de la même loi de distribution. L'auteur examine les conditions que doivent remplir les variables d'une suite  $x_1, x_2, \dots$  pour que la loi de distribution de la somme  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  soit indéfiniment divisible si chaque variable  $x_k$  dépend d'une loi indéfiniment divisible. En particulier les cas sont examinés où la loi limite est celle de Gauss ou de Poisson.

B. Hostinský (Brünn).

**Bernstein, S.:** Nouvelles applications des grandeurs aléatoires presque indépendantes. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 137—149 u. franz. Zusammenfassung 149—150 (1940) [Russisch].

Ce travail fait suite d'un mémoire de S. Bernstein publié dans les Math. Ann. 97, 1—59 (1926).  $E(x)$  étant la valeur moyenne (espérance math.) de  $x$ , les variables aléatoires  $u_1, u_2, \dots, u_n$  [ $E(u_i) = 0$ ,  $E(u_i^2) = b_i$ ,  $E\left(\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2\right) = B_n$ ;  $a_i$  = espérance mathématique conditionnelle de  $u_i$ ,  $b_i^*$  = dispersion conditionnelle de  $u_i$ , lorsque  $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$  sont connues] sont supposées de satisfaire aux conditions suivantes:

$$\frac{E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right)}{B_n} \rightarrow 0, \quad \frac{E\left(\sum_{i=1}^n |b_i^* - b_i|\right)}{B_n} \rightarrow 0, \quad \frac{E\left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 + \delta\right)}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \rightarrow 0;$$

la probabilité de l'inégalité  $u_1 + u_2 + \dots + u_n < z\sqrt{B_n}$  tend, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers la limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Étude des cas où la loi limite de répartition de  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  est la loi normale (loi de Gauss).

B. Hostinský (Brünn).

Feldheim, E.: Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème du calcul des probabilités dû à Simmons. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 20, 1—16 (1941).

Französische Übersetzung der Arbeit des Verf. in *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 10, 229 bis 243 (1939); dies. *Zbl.* 23, 338. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Smirnof, N.: Sur un théorème limite dans un schème d'épreuves indépendantes. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math.* 1939, 319—328 u. franz. Zusammenfassung 328 [Russisch].

Soit pour chaque valeur de  $x$  ( $0 < x \leq n$ )  $T_n(x)$  le nombre de fois qu'un événement  $A$  a lieu dans un système d'épreuves indépendantes dont les indices ne surpassent pas  $x$ ,  $P(A) = pn$ ,  $\bar{T}_n(x) = E T_n(x)$  de sorte que  $\bar{T}_n(x) = kp$  ( $k \leq x < k+1$ ). Désignons par  $V_n(\lambda)$  le nombre de fois que la courbe  $T_n(x)$  sort de la bande  $A_\lambda$  limitée par les courbes  $y_\lambda = \bar{T}_n(x) \pm \lambda \sqrt{np(1-p)}$  dans l'intervalle  $(0, n)$ . Pour  $n \rightarrow \infty$  on a  $P\{V_n(\lambda) \leq t \sqrt{np(1-p)}\} \rightarrow F(t, \lambda)$ , où

$$F(t, \lambda) = 1 - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} t^m \int_t^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u + (2m+1)\lambda)^2 \right\} du.$$

*B. Hostinský* (Brünn).

Lévy, Paul: Sur l'arithmétique des lois de probabilités enroulées. *C. R. Soc. Math. France* année 1938, 32—34 (1939).

Note préliminaire sur un travail plus étendu [voir P. Lévy, *Bull. Soc. Math. France* 67, 1—41 (1939); ce *Zbl.* 23, 58]. *B. Hostinský* (Brünn).

Marcinkiewicz, Joseph: Sur les variables aléatoires enroulées. *C. R. Soc. Math. France* année 1938, 34—36 (1939).

Des variables aléatoires dont les valeurs sont considérées mod 1 sont appelées variables aléatoires enroulées. Une variable aléatoire enroulée dont la densité de probabilité est

$$g(x) = \text{const.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(x+n)^2}{2\sigma^2} \right)$$

est appelée gaussienne. Indications sur la décomposition de  $g(x)$  en somme de deux densités de probabilité gaussiennes. *B. Hostinský* (Brünn).

Lévy, Paul: Observation sur la communication précédente. *C. R. Soc. Math. France* année 1938, 36—37 (1939).

Remarque sur les lois des probabilités enroulées pour lesquelles toutes les valeurs possibles sont multiples de  $\frac{1}{2}$  (voir la précédente communication de J. Marcinkiewicz). *B. Hostinský* (Brünn).

Kozakiewicz, W.: Sur la convergence presque certaine. *Bull. Sci. math.*, II. s. 64, 121—128 (1940).

Notwendige und hinreichende Bedingung für die „fast sichere“ Konvergenz einer Reihe von Zufallsgrößen  $\{X_n\}$  nach einer Zufallsgröße mit Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F(x)$  ist, daß  $\Delta_{np}(a, b) = \text{Wahrscheinlichkeit dafür, daß } a \leq X_h \leq b \text{ für alle } h = n+1, n+2, \dots, n+p$  die Grenzbeziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Delta_{np}(a, b) = F(b) - F(a)$  für alle Stetigkeitspunkte von  $F(x)$   $a, b$  ( $b > a$ ) befriedige. *Bruno de Finetti*.

Ottaviani, G.: Sulle funzioni indipendenti. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 11, 270—282 (1940).

Verf. betrachtet ein von Fréchet gestelltes Problem: die Charakterisierung der Funktionen  $f(x)$ , die „unabhängige Funktionen“  $g(x)$  im Sinne von Steinhaus (vgl. dies. *Zbl.* 15, 218 u. 18, 76) zulassen bzw. nicht zulassen. Einige hierzu notwendige Bedingungen werden festgestellt. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Lévy, Paul: Sur les discontinuités de certains processus stochastiques. *C. R. Soc. Math. France* année 1938, 39—42 (1939).

Une formule relative aux discontinuités. Voir le travail de P. Lévy dans *Compositio Math.* 7, 294, Théorème 2 (1939); voir ce *Zbl.* 22, 59. *B. Hostinský* (Brünn).



**Doubrowsky, V.:** Sur un problème limite de la théorie des probabilités. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 411—415 u. franz. Zusammenfassung 416 (1940) [Russisch].

Des changements aléatoires d'un système sont considérés sous l'hypothèse suivante: Il n'y a, dans chaque intervalle de temps borné, qu'un nombre fini de moments, où le système subit une variation, et d'ailleurs la limite du rapport de la probabilité de la variation de l'état pendant un certain intervalle de temps à la longueur  $h$  de cet intervalle, quand  $h$  tend vers zéro, existe et reste finie. Les différents états du système étant caractérisés par les valeurs d'une variable  $x$ , soit  $\pi_0(t, x, \tau)$  la probabilité pour que le système reste, pendant l'intervalle de temps  $t \leq s < \tau$ , dans l'état  $x$  où il se trouve à l'époque  $t$ . L'auteur trouve,  $p(s, x)$  étant une fonction donnée:

$$\pi_0(t, x, \tau) = \exp \left( - \int_t^\tau p(s, x) ds \right).$$

En partant de cette formule il calcule la probabilité pour qu'un état se présente pour la première fois à un moment donné  $\tau$  après le  $(n-1)$ ème changement du système ou au moment du  $n$ ème changement, si  $n$  changements ont lieu dans l'intervalle de temps  $t \dots \tau$ .

*B. Hostinsky (Brünn).*

**Khintchine, A.:** Sur la croissance locale des processus stochastiques homogènes à accroissements indépendants. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 487—507 u. franz. Zusammenfassung 507—508 [Russisch].

Un processus stochastique est une famille  $x(\lambda)$  de variables aléatoires le paramètre  $\lambda$  étant susceptible de toute valeur réelle. Le processus est dit homogène lorsque la loi de distribution de  $x(\lambda_0 + \lambda) - x(\lambda_0)$  ne dépend que de  $\lambda$ , et à accroissements indépendants lorsque, les intervalles  $(a, b)$  et  $(c, d)$  étant sans point commun,  $x(b) - x(a)$  et  $x(d) - x(c)$  sont des variables aléatoires indépendantes. L'auteur ne considère ici que des processus stochastiques possédant ces deux propriétés. — Soit  $u(\lambda)$  une fonction positive et non décroissante ( $0 < \lambda < \sigma$ ),  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\lambda) = 0$ ,  $x(0) = 0$ .

$u(\lambda)$  est une limite supérieure de  $x(\lambda)$ , lorsque la relation  $\frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) a la probabilité 1. L'auteur démontre que la fonction  $\sqrt{\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}$  est une limite supérieure pour tout processus  $x(\lambda)$  ne contenant pas de composante gaussienne, et d'autres propriétés du logarithme itéré.

*B. Hostinsky (Brünn).*

**Doebelin, W.:** Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff. Ann. École norm., III. s. 57, 61—111 (1940).

Soit  $P^{(n)}(x, E)$  la probabilité pour qu'un point mobile passe de  $x$  dans  $E$  en  $n$  épreuves,  $x$  étant un point et  $E$  un ensemble de points.  $P^{(n)}(x, E)$  peut être considéré comme le  $n$ ème itéré de  $P^{(1)}(x, E)$ , l'opération de itération étant entendue comme pour un noyau ordinaire. Les deux problèmes suivants sont traités dans ce travail: 1. Trouver l'allure asymptotique de la distribution de probabilité  $P^{(n)}(x, E)$  pour  $n \rightarrow \infty$ . 2. Étudier le mouvement du point mobile. — Si  $W$  est un ensemble donné de points,  $x$  un point de  $W$ , et  $E$  un ensemble formé de points de  $W$ , l'auteur appelle ce schème chaîne simple constante de Markoff (sous certaines conditions, relatives à  $E$ ). Il donne un exposé général en s'attachant surtout aux questions de stabilité, c'est à dire aux cas où le point mobile revient, après un certain nombre de passages, à une position qui appartient, en même temps que sa position initiale, à un ensemble donné. Ce schème général comprend les cas particuliers suivants: nombre de positions possibles du point mobile fini ou dénombrable; mouvement dans un espace euclidien où il y a une densité de probabilité.

*B. Hostinsky (Brünn).*

**Doebelin, W.:** Remarques sur la théorie métrique des fractions continues. C. R. Soc. Math. France année 1938, 28—29 (1939).

Eine ausführliche Darstellung des Inhalts der vorliegenden Note befindet sich in der in dies. Zbl. 22, 370 besprochenen Arbeit.

*H. L. Schmid (Berlin).*

**Doebelin, W.:** Sur l'équation matricielle  $A^{(t+s)} = (A^{(t)}A^{(s)})$  et ses applications au calcul des probabilités. Rectification. Bull. Sci. math., II. s. **64**, 35—37 (1940).

Démonstration rectifiée du théorème suivant: „si  $A(t)$  ( $t > 0$ ) est une famille de matrices telle que  $A(t)A(s) = A(t+s)$  et dont les éléments sont des fonctions mesurables du paramètre  $t$ , alors  $A(t)$  est une fonction analytique de  $t$ “, ainsi que d'un autre théorème donné par l'Auteur (ce Zbl. **18**, 156). — L'Auteur reconnaît que le premier théorème était déjà trouvé avant lui par le réf. [voir ce Zbl. **13**, 56; l'hypothèse supplémentaire y faite de savoir que  $|A(t)| \neq 0$ , se trouve toujours vérifiée lorsque la famille  $A(t)$  est irréductible et  $A(t) \neq 0$ , ce qui peut évidemment être admis sans restreindre la généralité].

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Wilson, Edwin B.:** The sampling error of the median. Science, New York **92**, 58—59 (1940).

Ist  $\varphi(x)dx$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte,  $M$  der Zentralwert, so findet man in den Lehrbüchern für den mittleren Fehler von  $M$  die Formel  $\sigma(M) = \varphi(M)/2\sqrt{n}$ . An einfach gebauten, aber dennoch „pathologischen“ Verteilungen weist Verf. nach, daß dieser Ausdruck zu unsinnigen Ergebnissen führen kann. Bei seiner Herleitung wird von einer Näherung Gebrauch gemacht, die bei einer raschen Änderung von  $\varphi(x)$  in der Umgebung von  $x = M$  nicht mehr zulässig ist, ein Umstand, der bei wirklich vorkommenden Verteilungen kaum zu vermuten ist. Verf. zeigt aber, wie man auch in solchen Ausnahmefällen den Fehler des Zentralwertes bestimmen kann.

v. Schelling (Berlin).

**Eddington, A. S.:** The correction of statistics for accidental error. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **100**, 354—361 (1940).

Verf. gibt Erläuterungen zu seiner von F. Dyson [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. London **86**, 686—706 (1926)] mitgeteilten Formel über die Verbesserung gemessener Werte wegen zufälliger Beobachtungsfehler. Der mittlere Fehler sinkt zwar durch diese Korrektur, so daß man etwa für eine Einzelparallaxe die optimale Schätzung erhält. Dagegen liefern die korrigierten Werte entgegen einer verbreiteten Ansicht keineswegs eine höhere Approximation an die wahre Verteilung aller Parallaxen. v. Schelling.

**Wolkowitsch, D.:** Applications de l'ellipsoïde d'inertie de Culmann. C. R. Soc. Math. France année 1938, 53—74 (1939).

Die beiden folgenden Aufgaben lassen sich ineinander überführen und sind also gleichwertig: I. Gegeben eine Anzahl räumlich verteilter, mit Masse belegter Punkte und eine feste Ebene; gesucht die zu dieser Ebene konjugierte Richtung bezüglich des Trägheitsellipsoides der Punktmassen. — II. Gegeben eine Anzahl von verschiedenen bewerteten Beobachtungspunkten, gesucht eine Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate. Auch Ausgleichung nach anderen vorgegebenen Kurven und verschiedene Interpolationsformeln lassen sich in diesen Zusammenhang einordnen.

Collatz (Karlsruhe).

### **Biomathematik, Versicherungs- und Finanzmathematik:**

**Mittmann, Otfried:** Funktionale Zusammenhänge zwischen Zygotenwahrscheinlichkeiten. Deutsche Math. **5**, 563—570 (1941).

Deckt sich inhaltlich mit der in dies. Zbl. **23**, 252 besprochenen Arbeit.

Harald Geppert (Berlin).

**Malécot, G.:** Sur la biométrie et les lois de Mendel. C. R. Soc. Math. France année 1938, 44—45 (1939).

Verf. deutet an, wie sich die von der Pearsonschen Schule untersuchten Korrelationskoeffizienten zwischen den bei Verwandten auftretenden Werten meßbarer Merkmale auch auf Grund der Annahme erklären lassen, daß die betrachteten meßbaren Merkmale sich durch Summierung der Auswirkungen einer bestimmten Anzahl mendernder Genpaare ergeben.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).



**Hadwiger, H.:** Über die Wahrscheinlichkeit des Ruins bei einer großen Zahl von Geschäften. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 6, 131—135 (1940).

Verf. gelangt bei Überführung einer Differenzen- in eine Differentialgleichung zu einer asymptotischen Formel, die nur näherungsweise gelten kann, was aus dem Vergleich mit der exakten Lösung der De Moivreschen Methode [s. deren Verallgemeinerung durch Ref., Giorn. Ist. Ital. Attuari 11, 1—88 (1940); dies. Zbl. 23, 257] hervorgeht. Vgl. auch oben S. 262.

*Bruno de Finetti (Trieste).*

**Cantelli, F. P.:** Osservazioni sulla formula di Hattendorff. Giorn. Ist. Ital. Attuari 11, 261—269 (1940).

Verf. bemerkt, daß die allgemeinste Fassung der Hattendorffschen Formel in seinem alten Beweis [von 1916, ausführlicher in Atti Soc. Ital. Progr. Sci. 18 II, 149 bis 153 (1930) entwickelt] enthalten ist.

*Bruno de Finetti (Trieste).*

## Numerische und graphische Methoden.

● **Emde, Fritz:** Tafeln elementarer Funktionen. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1940. XII, 181 S. u. 83 Fig. geb. RM. 12.—.

Dieses Tafelwerk ist in Inhalt, Form und Stellenzahl ganz auf die Bedürfnisse des rechnenden Physikers und Ingenieurs abgestimmt und unterscheidet sich daher weitgehend von den vorhandenen Tafelwerken. Maßgebend ist stets die relative Genauigkeit der Funktionswerte; dementsprechend sind die Argumentschritte zu 1, 2 oder 5 Einheiten der letzten Stelle so gewählt, daß der bei linearer Interpolation entstehende größte Fehler unter  $0,5 \cdot 10^{-4}$  des Funktionswertes bleibt; die Differenzen sind überall, auf den Schritt 1 umgerechnet, angegeben. Reliefdarstellungen und Kurvenbilder geben einen weitgehenden, oft überraschenden Einblick in die Eigenschaften der Funktionen und erleichtern die Überschkagskontrolle. Inhalt: I. Potenzen, Kehrwerte, Wurzeln der ersten Primzahlen. II. Faktorenzerlegung der vierstelligen Zahlen, Fakultäten, Vielfache von  $M$  und  $\frac{\pi}{2}$ . III. Kehrwerte und Wurzeln komplexer Zahlen, Umrechnung von rechtwinkligen in Polarkoordinaten. Vektoraddition. IV. Wurzeln quadratischer Gleichungen. V. und VI. Kubische und biquadratische Gleichungen. Diese Abschnitte enthalten eine sehr dankenswerte Zusammenstellung aller brauchbaren Wurzelkriterien, Methoden, Tafeln und Kurvenbilder zu ihrer zweckmäßigen Berechnung; sie werden besonders bei Eigenwertbestimmungen von Nutzen sein. VII. bis IX. Kreis- und Hyperbelfunktionen, Tafeln der praktisch wichtigen Kombinationen im Grad-, Rechten- und Bogenmaß, Formeltafeln, Exponentialfunktion und Logarithmus. X. Besondere Funktionen, z. B.  $\exp(-x^2)$ , die Plancksche Strahlungsfunktion, Greensche Funktion der Wärmeleitung, Eigenfunktionen des schwingenden Stabes,  $x \tanh x$ . XI. Die transzendenten Gleichungen der Schwingungslehre, wie  $x = \tanh x$ , usw. XII. Kreis- und Hyperbelfunktionen im Komplexen, Formeltafeln, Reliefbilder, Vorzeichen- und Umrechnungstafeln. XIII.  $\tanh r\sqrt{i}/r\sqrt{i}$ . XIV., XV. Kurvenbilder der ersten Tschebyscheffpolynome und von  $z^z$ . XVI. Formeln zum näherungsweise rationalen Rechnen mit Polynomen. XVII. Eine ausgezeichnete Anleitung zum Zahlenrechnen und Zusammenstellung weiterführender Literatur. *Harald Geppert.*

**Sauer, R.:** Über Interpolation von Kurvenscharen mit Anwendung auf die Berechnung von Geschößflugbahnen. Z. angew. Math. Mech. 20, 280—284 (1940).

Gegeben seien in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $x, y$  einzelne Kurven einer von einem Parameter  $\lambda$  abhängigen Kurvenschar, die unter Benützung einer Hilfsveränderlichen  $t$  in der Form  $x = x(t, \lambda)$ ,  $y = y(t, \lambda)$  geschrieben sei und die gewisse natürliche Regularitätsbedingungen erfülle. Durch Interpolation sind andere Kurven der Schar zu bestimmen. Durch die Einführung von  $t$  entsteht neben der Schar  $\lambda = \text{const}$  die Kurvenschar  $t = \text{const}$ , durch die auf den  $\lambda$ -Kurven nach  $t$  bezifferte Skalen ausgeschnitten werden. Um eine hohe Interpolationsgenauigkeit zu

erhalten, nimmt Verf. eine Abbildung eines durch  $\lambda$ - und  $t$ -Kurven begrenzten Gebietes  $G$  der  $(x, y)$ -Ebene auf ein Gebiet  $\Gamma$  einer  $(\xi, \eta)$ -Ebene vor, bei der jede  $\lambda$ -Kurve von  $G$  affin in eine  $\lambda$ -Kurve von  $\Gamma$  transformiert wird und bei der für alle  $t$ -Skalen der  $\lambda$ -Kurven von  $\Gamma$

$$\xi(0, \lambda) = \eta(0, \lambda) = 0, \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=0} = \alpha_1, \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{t=0} = \alpha_2, \quad \left(\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)_{t=0} = \beta$$

gilt, wo  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2, \beta \neq 0$  von  $\lambda$  unabhängige willkürliche Konstanten sind. Da die  $\lambda$ -Kurven durch verschiedene affine Transformationen verzerrt werden, ist die Abbildung von  $G$  auf  $\Gamma$  selbst nicht affin. Das Verfahren besteht nun darin, einzelne Kurven  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$  von  $G$  in das Gebiet  $\Gamma$  zu transformieren, dort zwischen entsprechenden Punkten der  $t$ -Skalen der Kurven  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  linear oder quadratisch zu interpolieren, wodurch sich in  $\Gamma$  zwischengeschaltete  $\lambda$ -Kurven mit ihren  $t$ -Skalen ergeben, und diese neuen Kurven von  $\Gamma$  wieder nach  $G$  zurückzutransformieren. — Als Anwendung behandelt Verf. die Interpolation von Flugbahnscharen eines Geschosses. Die hierbei vorgenommene Spezialisierung des Verfahrens liefert eine von H. Athen [Z. angew. Math. Mech. 19, 361—371 (1939); dies. Zbl. 22, 414] angegebene Interpolationsmethode.

Werner Schulz (Berlin).

**Bödewadt, U. T.:** Ein vereinfachtes Interpolationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 20, 361—363 (1940).

Es sei eine Funktionstafel mit gleich großen Argumentintervallen auf ein Zehntel oder Zwanzigstel dieses Intervalles zu interpolieren. Verf. beschreibt für den Fall, daß die zweite und die höheren Differenzen nicht allzu groß werden ( $\Delta^2 \leq 100$ ,  $\Delta^3 \leq 60$  Einheiten der letzten Funktionsstelle), ein mit der Rechenmaschine bequem durchführbares Interpolationsverfahren, bei dem die Funktion in jedem Intervall durch einen fünfteiligen (oder durch einen zweiteiligen) Streckenzug ersetzt wird. Es folgen Fehleruntersuchung, Rechenanordnung und Zahlenbeispiel.

Collatz (Karlsruhe).

**Ivanov, V.:** On the convergence of the process of iteration in the solution of a system of linear algebraic equations. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 477—483 u. engl. Zusammenfassung 483 [Russisch].

Der Auflösungsprozeß  $\mathbf{x}^{(v)} = \mathbf{u} + A\mathbf{x}^{(v-1)}$  (fette Buchstaben für Vektoren,  $A$  = gegebene  $n$ -reihige quadratische Matrix) für das System linearer Gleichungen  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + A\mathbf{x}$  sei „einfache Iteration“ genannt. Es wird dabei stets ein voller Satz neuer  $\mathbf{x}^{(v)}$ -Komponenten aus einem vollen Satz alter Näherungen  $\mathbf{x}^{(v-1)}$  gewonnen. Im Gegensatz dazu wird bei der „Seidelschen Iteration“ bekanntlich komponentenweise verbessert, d. h. zwischen die Näherungen  $\mathbf{x}^{(v-1)} = \mathbf{y}^{(0)}$  und  $\mathbf{x}^{(v)} = \mathbf{y}^{(n)}$  werden stets  $n-1$  Hilfsvektoren gemäß  $\mathbf{y}^{(\mu)} = \mathbf{u}^{(\mu)} + A^{(\mu)}\mathbf{y}^{(\mu-1)}$  ( $\mu = 1, \dots, n-1$ ) eingeschaltet, die immer nur eine neue (auf Grund der jeweils besten bekannten Komponentennäherungen berechnete) Komponente haben ( $A^{(\mu)} =$  Einheitsmatrix, in der die  $\mu$ -te Zeile durch die  $\mu$ -te Zeile von  $A$  ersetzt ist;  $\mathbf{u}^{(\mu)} =$  Nullvektor, dessen  $\mu$ -te Komponente durch die von  $\mathbf{u}$  ersetzt ist). Verf. stellt sich die Aufgabe, das gegenseitige Verhältnis einfacher und Seidelscher Iteration zu klären. Die einfache Iteration konvergiert bei Konvergenz der Matrizenreihe  $1 + A + A^2 + \dots$ , also wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Die Konvergenz des Seidelschen Prozesses läßt sich durch Einsetzen der  $\mathbf{y}$ -Gleichungen ineinander auf die einer einfachen Iteration  $\mathbf{x}^{(v)} = \mathbf{v} + B\mathbf{x}^{(v-1)}$  mit  $B = A^{(n)}A^{(n-1)} \dots A^{(1)}$  und passendem, von  $\mathbf{u}$  und den  $A^{(\mu)}$  abhängendem  $\mathbf{v}$  zurückführen. Nach Berechnung der Elemente von  $B$  aus denen von  $A$  lassen sich damit bekannte Konvergenzkriterien für einfache Iteration auch zur Beurteilung der Konvergenz bei der Seidelschen Iteration anwenden. Bei 2 und 3 Gleichungen wird durch Ermittlung der Konvergenzbereiche und durch Zahlenbeispiele gezeigt, daß die Konvergenz keines der beiden Verfahren von der des anderen Verfahrens abhängt. Auch bei nichtlinearen Gleichungssystemen ist Seidelsche auf einfache Iteration zurückführbar.

Theodor Zech (Darmstadt).



**Mikeladze, Sch.:** Über die Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenmethode. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 627—642 u. dtsh. Zusammenfassung 642 [Russisch].

Für die schrittweise numerische Integration einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

gibt Verf. für die Berechnung der Werte an der neuen Stelle  $a + h$  aus den bereits berechneten Werten an den früheren Stellen  $a, a - h, \dots$  vier verschiedene Reihen von Formeln an, die teils bekannte Formeln systematisch einordnen, teils neu sind (Formeln mit berechneten Zahlenkoeffizienten und Angabe der Restglieder). — 1. Unsymmetrische Extrapolationsformeln,  $y(a + h)$  ausgedrückt durch  $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)$  und von der Stelle  $a$  aus aufsteigende Differenzen von  $f$  (Formeln von Adams, Falkner). 2. Interpolationsformeln,  $y(a + h)$  ausgedrückt durch  $y(a), y'(a + h), y''(a + h), \dots, y^{(n-1)}(a + h)$  und von  $a + h$  aus aufsteigende Differenzen von  $f$  (Formel von Laplace für Gleichung 1. Ordnung, für Gleichungen höherer Ordnung sind die Formeln neu). 3. In  $y$  symmetrische Extrapolationsformeln,  $y(a + h)$  ausgedrückt durch  $y(a), y(a - h)$ , Ableitungen  $y^{(v)}$  bei  $a$ , Differenzen von  $f$  von  $a$  aus aufsteigend (Formeln von Nyström und Störmer bei Gleichungen 1. und 2. Ordnung, bei höherer Ordnung neue Formeln.) 4. Interpolationsformeln mit Benutzung zentraler Differenzen von  $f$  und in den  $y$ -Werten symmetrisch (Formeln von Cowell). Collatz.

**Mikeladze, Sch.:** Numerische Integration der Gleichungen vom elliptischen und parabolischen Typus. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 57—73 u. dtsh. Zusammenfassung 73—74 (1941) [Russisch].

Verf. hat mehrfach Differenzenmethoden zur Auflösung linearer partieller Differentialgleichungen behandelt (vgl. z. B. dies. Zbl. 10, 399; 16, 36; 19, 274 u. a.). Hier beschäftigt er sich mit der möglichst günstigen Berücksichtigung der gegebenen Randwerte einer Funktion  $u(x, y)$ , die im Gebiet  $A$  mit dem Rand  $\gamma$  einer elliptischen Differentialgleichung

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} - gu = t$$

mit stetig ortsabhängigen Koeffizienten  $a, c, \dots$  genügen soll. Überdeckt man nämlich die  $x, y$ -Ebene mit einem quadratischen Netz der Maschenweite  $h$ , so verbindet das einfachste Differenzenverfahren den  $u$ -Wert jedes Gitterpunktes durch eine Gleichung mit den vier unmittelbar benachbarten Netzpunkten. In „Randpunkten“  $P'$ , d. h. in Gitterpunkten aus  $A$ , für die diese vier Nachbarn nicht sämtlich zu  $A$  gehören, versagt dies Verfahren. Nur wenn  $P'$  zufällig auf  $\gamma$  liegt, hat man unmittelbar einen Ersatz: Man wählt  $u' = u(P')$  gleich dem in  $P'$  vorgeschriebenen Randwert. Verf. wendet sich gegen das früher manchmal benutzte Verfahren, in Punkten  $P'$ , die nicht auf  $\gamma$  liegen, willkürlich in benachbarten  $\gamma$ -Punkten ausgewählte Randwerte von  $u$  zu benutzen. Collatz schlug in Z. angew. Math. Mech. 13, 56—57 (1933) statt dessen vor, Werte  $u(P')$  durch lineare Interpolation aus den  $u$ -Werten je eines benachbarten Randpunktes und inneren Gitterpunktes zu gewinnen. Verf. erweitert diesen Gedanken in naheliegender Weise durch Verwendung von 4 Nachbarnpunkten, indem er jeden der 4 schon genannten Gitternachbarn von  $P'$ , der innerhalb  $A$  liegt, verwendet, — jeden, der außerhalb liegt, aber durch den zwischen ihm und  $P'$  auf gleicher Netzlinie gelegenen  $\gamma$ -Punkt ersetzt. Man kann dann in  $P'$  eine der Differentialgleichung angepaßte Differenzengleichung aufstellen, in der die Argumente  $x, y$  allerdings teilweise um weniger als  $h$  fortschreiten. Verf. gibt derartige Differenzengleichungen explizit an und führt Fehlerabschätzungen nach dem Verfahren von Gerschgorin [Z. angew. Math. Mech. 10, 373—382 (1930)] unter speziellen Voraussetzungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung durch. Bei einem Zahlenbeispiel erzielt er eine beträchtliche Verbesserung gegenüber der Collatzschen Interpolation, indem er  $h$  gegenüber den Abmessungen von  $A$  verhältnismäßig groß macht und das Netz so einrichtet, daß die  $P'$  meist fast

um  $h$  von  $\gamma$  entfernt liegen. — Gleichungen mit mehr als 2 unabhängigen Veränderlichen lassen sich entsprechend behandeln. Verf. erwähnt  $\Delta u = \varphi(x, y, z)$  und die Gleichung der Wärmeleitung in einem ebenen, inhomogenen Gebilde, wofür ebenfalls explizite Differenzengleichungen und ein Zahlenbeispiel gegeben werden.

Theodor Zech (Darmstadt).

**Collatz, L.: Vergleich der Integralgleichungsmethode von Bucerius mit dem Ritzschen Verfahren zur genäherten Lösung von Differentialgleichungen.** Astron. Nachr. 271, 116—120 (1941).

Bucerius hat in mehreren Arbeiten zur näherungsweise Lösung von Randwertproblemen der Gestalt  $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ ,  $x(0) = x(a) = 0$ , eine Integralgleichungsmethode vorgeschlagen (vgl. z. B. dies. Zbl. 19, 218 und 23, 273). Das Randwert-

problem wird dabei in die Integralgleichung  $x(t) = -\int_0^a G(t, s) f[s, x(s), \dot{x}(s)] ds$  mit  $G(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a}{\nu^2 \pi^2} \sin \frac{\nu \pi s}{a} \sin \frac{\nu \pi t}{a}$  übersetzt; endlicher Fourieransatz der Lösung,

$x(t) = \sum_{\nu=1}^m a_{\nu} \sin \frac{\nu \pi t}{a}$ , und Koeffizientenvergleich liefert ein Gleichungssystem für die

$m$  Koeffizienten  $a_{\nu}$  und damit eine Näherungslösung. Verf. weist darauf hin, daß das Verfahren von Bucerius zur gleichen Näherungslösung führt wie das bequemer zu handhabende Ritzsche Verfahren zur Auflösung eines zugeordneten Variationsproblems, wenn die Ableitung  $\dot{x}$  nicht explizit in  $f(t, x, \dot{x})$  auftritt. Bei  $\dot{x}$ -abhängigem  $f$  kann man die Bucerius'schen Gleichungen wenigstens durch formale Übertragung der Ritzschen Gleichungen unmittelbar gewinnen. Die Begründung dieser Gleichungen auf Ritzsche Weise scheitert allerdings am Fehlen des entsprechenden Variationsproblems.

Theodor Zech (Darmstadt).

**Viola, Tullio: Calcolo approssimato di autovalori.** Rend. Mat. Univ. Roma, V. s. 2, 71—106 (1941).

Zur genäherten Berechnung der Eigenwerte  $\lambda$  von  $L(\varphi) + \lambda M(\varphi) = 0$ , wo  $L$  und  $M$  lineare Differentialausdrücke in  $\varphi$  sind, wird für  $\varphi$  ein Ansatz  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \varphi_k(x)$  gemacht. Es werden die beiden in den  $\gamma_k$  hermiteschen Formen gebildet

$$\Phi_n = \int (L(\varphi) + \lambda M(\varphi))^2 dx \quad \text{und} \quad \Psi_n = \int \varphi^2 dx$$

und  $\Phi_n$  unter der Nebenbedingung  $\Psi_n = 1$  zum Minimum gemacht. Der aus einer Determinante berechenbare Minimalwert  $\Phi_n$  ergibt über  $\lambda$  aufgetragen eine Kurve, deren Minima den einzelnen Eigenwerten  $\lambda_i$  entsprechen. An einigen Beispielen werden als weitere Methoden zur genäherten Eigenwertberechnung eine Art Differenzenverfahren und eine Potenzreihenentwicklung bei Vorhandensein singulärer Punkte durchgeführt.

Collatz (Karlsruhe).

## Geometrie.

### Grundlagen, Nichteuklidische Geometrie:

**Kubota, Tadahiko: Eine Begründung der elementaren Geometrie.** 3. Tl. 5. Abschnitt. Begründung der Anordnungstheorie in der projektiven Geometrie. Tôhoku Math. J. 47, 294—303 (1940).

Es werden in der projektiven Geometrie unter Voraussetzung der Verknüpfungsaxiome aus einer Gruppe von projektiven Anordnungsaxiomen die elementaren Sätze der Anordnung hergeleitet. Grundbegriff ist das Sich-Trennen von Punktpaaren. Die drei ersten, linearen Anordnungsaxiome des Verf. entsprechen im wesentlichen den linearen Axiomen, die Hilbert für die Zwischenbeziehung zugrunde legt. Als ebenes, dem Axiom von Pasch entsprechendes, viertes Anordnungsaxiom verwendet der Verf. ein Axiom, das auch in Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. 2, benutzt worden ist.

Bachmann (Königsberg i. Pr.).



**Sakellariou, N.:** Über die nichteuklidische Geometrie von Riemann. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 155—189 (1940) [Griechisch].

Die Arbeit enthält zwei Vorträge, die vor der griechischen Math. Ges. vom Verf. gehalten wurden. Sie bilden eine schöne Zusammenfassung der Entwicklung der Riemannschen nichteuklidischen Geometrie.

*Yannopoulos* (Athen).

**Kerékjártó, B. de:** Sur les groupes transitifs de la droite. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 21—35 (1941).

Die  $n$ -fach transitiven Gruppen von Transformationen der Geraden in sich sind stetig. Nach Brouwer gibt es nur einfach, zweifach und dreifach transitive Gruppen dieser Art, und dieselben sind bzw. homöomorph zu der Gruppe der Translationen, der Affinitäten und der Projektivitäten. Die Kennzeichnung der zweifach und dreifach transitiven Gruppen wird auf einfache Weise von neuem durchgeführt, wesentlich unter Benutzung der Eigenschaften involutorischer Abbildungen, die in solchen Gruppen existieren müssen.

*K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

**Busemann, Herbert:** On Leibniz's definition of planes. Amer. J. Math. **63**, 101—111 (1941).

Nach Leibnizens Definition wäre die Ebene die Menge  $m(A, B)$  aller Punkte  $X, Y$ , die von zwei festen Punkten  $A, B$  gleiche Abstände haben. Es wird die Tragweite dieser Definition untersucht, wenn dem Abstandsbegriff nicht der euklidische  $E_3$ , sondern ein metrischer Raum  $R$  unterlegt ist. Wir nennen  $R$  einen  $L$ -Raum, wenn die Menge  $m(A, B)$  für je zwei ihrer Punkte  $P, Q$  auch jede  $P, Q$  enthaltende Menge enthält, die mit einer euklidischen Strecke isometrisch ist. (Die Existenz solcher Mengen ist mit einem von Menger metrisch definierten Konvexitätsbegriff [Math. Ann. **100**, 75—163 (1928), insbes. S. 87] gleichwertig.) Verf. zeigt, daß ein im Mengerschen Sinn nach innen und außen konvexer, beschränkt kompakter (d. h. jede beschränkte Punktfolge hat einen Häufungspunkt)  $L$ -Raum mit einem endlich dimensionalen euklidischen oder hyperbolischen Raum isometrisch ist. Daraus wird gefolgert: Besitzt der nach innen und außen konvexe, beschränkt kompakte Raum  $R$  die Eigenschaft, je zwei kongruente Punktetripel durch eine Bewegung (eindeutige, abstandstreue Abbildung auf sich) ineinander überzuführen, so ist seine Metrik entweder euklidisch oder hyperbolisch.

*G. Alexits* (Budapest).

### **Elementargeometrie, darstellende Geometrie:**

**Kakridis-Theodorakopoulos, P.:** Geometrische Probleme. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 120—138 (1940) [Griechisch].

Kurzgefaßter Bericht über die geschichtliche Entwicklung von Lösbarkeitsfragen geometrischer Probleme im Zusammenhang mit der Algebra.

*Yannopoulos*.

**Tacchella †, Giuseppe:** Sulla rappresentazione analitica di figure composte. Atti Soc. Sci. Lett. Genova **5**, 254—266 (1940).

Anschließend an eine frühere Untersuchung [Giorn. Mat. Battaglini **71**, 1—52 (1933); dies. Zbl. **7**, 362] handelt Verf. von den Gleichungen geknickter, begrenzter Linienzüge, wie sie in den Figuren der Ornamentik vorkommen. Die Hauptbemerkungen sind:

1. die Gleichung  $\sum_{i=1}^n p_i |a_i x + b_i y + c_i| = m$  stellt ein  $2n$ -Seit mit den Diagonalen  $a_i x + b_i y + c_i = 0$  dar; 2. beim Übergang von  $f(x, y - a) = 0$  zu  $f(x, |y - a|) = 0$  werden die in der Halbebene  $y \geq a$  liegenden Kurventeile durch ihre Spiegelbilder an der Geraden  $y = a$  ergänzt, die anderen Teile gelöscht; 3. beim Übergang von  $y = f(x)$  zu  $y = |f(x)|$  werden die in  $y \geq 0$  liegenden Kurventeile erhalten, die andern an der  $x$ -Achse gespiegelt. Als Beispiel für die methodische Zusammensetzung von Figurengleichungen behandelt damit Verf. 13 von L. Collatz [Z. math. nat. Unterr. **64**, 165—169 (1933)] angegebene Figuren.

*Harald Geppert* (Berlin).

**La Menza, François:** Sur la morphologie des polytopes convexes. C. R. Soc. Math. France année 1938, 75—83 (1939).

Auszug einer Arbeit (siehe deren ausführliches Referat in dies. Zbl. 19, 1) über die algebraische Charakterisierung der Polytope mittels linearer Ungleichungen. Behandelt werden deren Verträglichkeit und Irreduzibilität, Untersysteme, konvexe Polytope und Charakterisierung ihrer Form mittels Unterdeterminanten und deren Vorzeichen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

**Lense, J.:** Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie. Astron. Nachr. 271, 121—132 (1941).

Die wichtigsten Formeln der sphärischen Astronomie (Transformation der astronomischen Koordinaten, Einfluß von Präzession, Nutation, Aberration, Parallaxe und Instrumentenfehlern auf die Äquatorialkoordinaten der Gestirne) werden in außerordentlich übersichtlicher und klarer Weise ohne Verwendung der sphärischen Trigonometrie allein unter Zuhilfenahme eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes hergeleitet.

U. Graf (Danzig).

**Krames, Josef:** Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven. (Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Örter“.) Mh. Math. Phys. 49, 327—354 (1941).

Die Rekonstruktion eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung ist bis in die jüngste Zeit, abgesehen vom Fall der Ebene, unter der Voraussetzung, daß eine hinreichende Anzahl von Bildpunktpaaren zur Verfügung steht, als eine eindeutige Aufgabe angesehen worden. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß bei einer besonderen Gattung von Flächen 2. Ordnung  $\Phi$  als Objekt, wenn die beiden Projektionszentren  $O_1, O_2$  auf einer solchen Fläche eine besondere Lage haben, die obige sog. Grundaufgabe der Photogrammetrie zweideutig, in einem besonderen Fall sogar dreideutig ist, auch bei Heranziehung der Bildpaare von beliebig vielen Punkten von  $\Phi$ . Die Flächen  $\Phi$  sind diejenigen Flächen 2. Ordnung, einschließlich der singulären, die sich durch zwei kongruente Ebenenbüschel mit den Achsen  $e_1, e_2$  erzeugen lassen. Die Mehrdeutigkeit tritt dann und nur dann ein, wenn das Objekt eine solche Fläche  $\Phi$  ist und  $O_1$  auf  $e_1, O_2$  auf  $e_2$  liegt. Bringt man die Sehstrahlbüschel ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) unter Aufrechterhaltung der Zuordnung ihrer Strahlen und Ebenen in eine solche Lage, daß sich die zugeordneten Ebenen der beiden kongruenten Ebenenbüschel ( $e_1$ ), ( $e_2$ ) identisch entsprechen, so erhält man eine neue Lösung. Zu zwei vorgegebenen Projektionszentren  $O_1, O_2$  gehört eine fünffach unendliche Menge von solchen Flächen  $\Phi$ , die im Hinblick auf die eintretende Mehrdeutigkeit der Rekonstruktionsaufgabe als „gefährliche Örter“ zu bezeichnen sind.

Verf. hat die Ergebnisse seiner Untersuchungen am 12. I. 1938 zur Wahrung der Priorität bei der Akademie der Wissenschaften in Wien hinterlegt und sie im „Anzeiger“ dieser Akademie erstmalig 1940, Nr 6, S. 26ff. veröffentlicht. In letzter Zeit sind auch andere Autoren den gefährlichen Örtern auf die Spur gekommen, jedoch ohne das Problem in seiner Ganzheit zu erfassen.

E. Kruppa (Wien).

### **Projektive und algebraische Geometrie:**

**Coşniţa C.:** Coordonnées barycentriques. 1. Le point. La droite. Le cercle. Les coniques. Numerus, Bucureşti 6, 85—113 et 234—239 (1940).

**Palla, A. F.:** Geometrische Deutung des Raumes von  $n$  Dimensionen. Bull. Soc. Math. Grèce 20, 206—230 (1940) [Griechisch].

Eine elementare Einführung des  $n$ -dimensionalen linearen, euklidischen und projektiven Raumes. Die entwickelte Theorie ist längst bekannt.

Yannopoulos.

**Turri, Tullio:** Sulle anticorrelazioni. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s., 1, 274—297 (1940).

Vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten Teil behandelt Verf. nach Zusammenstellung einiger Eigenschaften der Antikorrelationen  $\alpha$  die Transformierte einer Homographie  $\gamma$  mittels  $\alpha$ , d. h. die Homographie  $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ , und wendet dann seine Ergebnisse auf den Fall  $\gamma = \alpha^2$  an. Bezeichnet  $A$  die Matrix von  $\alpha$ , also  $(A')^{-1}A$



diejenige von  $\alpha^2$ , so müssen die Elementarteiler der charakteristischen Matrix  $\|(A')^{-1}\bar{A} - \varrho I\|$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix bezeichnet, paarweise von der Form  $(re^{i\varphi} - \varrho)^q$ ,  $(r^{-1}e^{i\varphi} - \varrho)^q$  sein, wo  $r > 0$  und  $\varphi$  reelle Zahlen bedeuten. Für  $r \neq 1$  muß es daher zu jedem charakteristischen Raum, der einer Wurzel  $re^{i\varphi}$  der charakteristischen Gleichung von  $\alpha^2$  entspricht, einen zweiten charakteristischen Raum geben, der der Wurzel  $r^{-1}e^{i\varphi}$  zugeordnet ist, und zwischen diesen beiden Räumen induziert  $\alpha^2$  projektiv identische Homographien. Auszunehmen ist der Fall  $r = 1$ , in dem die Zahl der genannten Divisoren sowohl gerade wie ungerade sein kann. Es folgt hieraus nach weiteren Überlegungen, daß die Untersuchung der Korrelationen auf zwei Fälle zurückgeführt werden kann, 1.  $\alpha^2$  besitzt lediglich zwei charakteristische Räume, die den Wurzeln  $re^{i\varphi}$  und  $r^{-1}e^{i\varphi}$  mit  $r \neq 1$  entsprechen, 2.  $\alpha^2$  besitzt einen einzigen charakteristischen Raum, d. h. die charakteristische Gleichung besitzt eine einzige Wurzel vom Typus  $e^{i\varphi}$ . — Der zweite Teil befaßt sich mit der Bestimmung der elementaren irreduziblen Antikorrelationen, in die  $\alpha$  zerfällt werden kann.  $M$  und  $N$  bezeichnen die folgenden Matrizen der Ordnung  $q$

$$M = r \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & & (-1)^{q-1} & (-1)^{q-1} \end{pmatrix},$$

wobei  $r$  positiv reell und  $r \neq 1$  vorausgesetzt ist. Abgesehen von einer linearen Substitution und einer multiplikativen Konstanten sind dann die irreduziblen Antikorrelationen darstellbar entweder durch eine Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & (M')^{-1} \\ & 0 \end{pmatrix}$  der Ordnung  $2q$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix der Ordnung  $q$  bezeichnet, oder durch eine Matrix der Form  $N$ . — Im dritten Teil endlich berechnet Verf. die Zahl der paarweise projektiv verschiedenen Antikorrelationen, deren Quadrat  $\alpha^2$  ist, wobei er die irreduziblen Antikorrelationen, mittels derer  $\alpha$  zusammengesetzt ist, als bekannt voraussetzt. Grundlegend für die Untersuchung ist die Tatsache, daß (1) durch eine lineare Transformation auf die gestürzte Matrix zurückgeführt werden kann, was bei  $N$  nicht möglich ist. Die Arbeit weist einige Analogien mit der Untersuchung des Verf. über Korrelationen zwischen zusammenfallenden Räumen auf (dies. Zbl. 21, 249). Der Vergleich der Ergebnisse zeigt den nicht unmittelbar vorauszu sehenden Sachverhalt, daß den oben genannten Typen elementarer Antikorrelationen genau fünf Typen irreduzibler Korrelationen entsprechen.

L. Campedelli (Firenze).

**Turri, T.: Sulle anticorrelazioni. (Riassunto.)** Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 10, 33—34 (1940).

Zusammenstellung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit.

Harald Geppert (Berlin).

**Mehmke, Rudolf: Geometrie der Lage oder des Maßes?** Mh. Math. Phys. 49, 303—311 (1941).

Von Cayley stammt das Wort: „All geometry is projective geometry“. Verf. tritt in der vorliegenden Arbeit in gewissem Sinne für die entgegengesetzte These ein, indem er eine Reihe von Beispielen aufweist, bei denen die lagegeometrischen Aussagen von metrischen umschlossen werden. Verf. gibt zunächst den ganz elementaren analytischen Beweis des Desarguesschen Satzes der Ebene, der auf der Möbiusschen Addition von Punkten beruht. Ihm schließt sich ein mit Vorstellungen der Mechanik (Kraftbegriff) arbeitender Beweis für seine Umkehrung an. Endlich folgt ein ganz einfacher Beweis für den Desarguesschen Satz und seine Umkehrung, der ohne Koordinaten auskommt, vielmehr den ganzen Zusammenhang in einer einzigen Gleichung zwischen Grassmannschen äußeren Produkten darstellt. Der zweite Teil der Arbeit

handelt unter demselben leitenden Gesichtspunkt von zwei projektiven Punktreihen, insbesondere von dem Satz, daß sich die kreuzweisen Verbindungslinien von je zwei Paaren entsprechender Punkte zweier projektiver Reihen einer Ebene auf einer festen Geraden treffen. Der Satz wird metrisch vervollständigt und unter Heranziehung mechanischer Vorstellungen bewiesen. Im dritten Teil werden Verallgemeinerungen auf krumme projektive Punktreihen in derselben einfachen Weise bewiesen. Der vierte Teil endlich handelt vom vollständigen ebenen Vierseit, wobei von der zugehörigen projektiv-invarianten Dyadensumme ausgegangen wird. Es folgt dann leicht der bekannte Satz von Hesse.

Steck (München).

**Barrau, J. A.: Konfigurationen, deren Restfiguren Konfigurationen sind.** *Mathematica, Zutphen B*, **9**, 139—145 (1941) [Holländisch].

Entfernt man von einem vollständigen Vierseit, also einer Konfiguration  $(6_2 4_3)$  eine Gerade und die mit ihr inzidenten Punkte, so bleibt ein Dreiseit, also eine Konfiguration  $(3_2 3_2)$ . Verf. geht umgekehrt von einer Konfiguration aus und fragt, wie man durch Hinzufügen eines Elements der einen Art und einer gewissen Anzahl von Elementen der anderen Art eine neue Konfiguration herleiten kann. Die vorgegebene Konfiguration ist dann eine Restfigur der neuen Beispiele. *E. A. Weiss* (Posen).

**Bottema, O.: Selbstprojektive Punktgruppen in  $R_n$ .** *Nieuw Arch. Wiskde* **20**, 225—243 (1940) [Holländisch]

Bekanntlich bleibt das Doppelverhältnis von 4 beliebigen Punkten der Geraden bei den Permutationen der Vierergruppe invariant. Demgegenüber gestatten Würfe von  $n + 3$  Punkten des  $R_n$  im allgemeinen keine Selbstprojektionen in sich mehr. Die Spezialfälle, in denen Selbstprojektivitäten möglich sind, hat Barrau (s. dies. Zbl. **16**, 71) für  $n = 2$  und 3 untersucht. Verf. löst hier die Frage für allgemeines  $n$ . Von den  $n + 3$  Punkten werden  $n + 2$  als Eckpunkte und Einheitspunkt eines projektiven Koordinatensystems genommen und der  $(n + 3)$ -te Punkt darin durch die Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  dargestellt. Dann ergibt es sich zunächst, daß die in Frage kommenden Permutationen höchstens 2 Punkte des Wurfes invariant lassen können. Daraus folgen sofort 3 Fallunterscheidungen, je nachdem ob 2, 1 oder kein Punkt invariant bleibt. Die fraglichen Permutationen bestehen dann außer 2 oder 1 Fixziffer in den ersten beiden Fällen stets aus einer Anzahl gleichgroßer Zyklen. Zu jeder Faktorzerlegung von  $n + 1$ ,  $n + 2$  oder  $n + 3$ , zu der solche Permutationen angegeben werden können, gibt es auch selbstprojektive Würfe, die diese Permutationen gestatten. Die  $(n + 3)$ -ten Punkte erfüllen dabei in den ersten beiden Fällen gewisse lineare Räume, die auch isolierte Punkte sein können, und im 3. Fall gewisse rationale Mannigfaltigkeiten. Diese Ergebnisse werden rechnerisch gefunden, worauf sich zum Schluß noch die Betrachtung einiger Spezialfälle anschließt.

Bureau (Hamburg).

**Ciani, Edgardo: Una nuova forma dell'equazione di una conica.** *Period. Mat.* **IV**, s. **21**, 107—112 (1941).

Wählt man auf einem Kegelschnitt  $C$  einen harmonischen Punktwurf  $MNPQ$ , d. h. einen solchen, der bei der birationalen Geradenabbildung von  $C$  harmonisch ist, und legt die Eckpunkte des Bezugsdreiecks nach  $M, N, P$ , den Einheitspunkt nach  $Q$ , so erhält  $C$  die Gleichung  $y^{-1} = \frac{1}{2}(x^{-1} + z^{-1})$ . Ist  $RS$  das zu den Paaren  $MN$  und  $PQ$  harmonische Punktepaar auf  $C$ , so bestimmen diese 6 Punkte ein Hexagramm, und man kann leicht explizit die sechs Involutionen auf  $C$  angeben, die die sechs Ecken ineinander überführen, sie zu harmonischen Homologien, die  $C$  fest lassen, erweitern und die Konfiguration ihrer Zentren und Achsen analytisch verfolgen, wie dies Verf. tut.

Harald Geppert (Berlin).

**Cattaneo, Paolo: Sopra un'interessante coppia di coniche.** *Period. Mat.*, **IV**, s. **21**, 66—67 (1941).

Bestimmt man auf jedem Strahl eines Büschels mit dem Scheitel  $O$  zu seinem Schnittpunkt mit einer festen Geraden  $r$  den auf ihm gelegenen konjugierten Punkt bezüglich eines Kegelschnittes  $C$ , so erhält man einen Kegelschnitt  $C'$ . Es wird die



Gleichung von  $C'$  im allgemeinen Fall sowie unter der Annahme, daß  $O$  ein Scheitel von  $C$  ist, angegeben.

*E. Kruppa* (Wien).

**Kollros, Louis:** Une propriété des variétés du second ordre. Comment. math. helv. **13**, 108—118 (1941).

Trägt man auf der negativen Seite der Normalen einer Ellipse eine Strecke von der Länge des Krümmungsradius ab, so ist nach Steiner der über dieser Strecke als Durchmesser konstruierte Kreis dem orthoptischen Kreis der Ellipse orthogonal. — Verf. zeigt, daß diese Eigenschaft eine einfache Folgerung eines Satzes von Faure ist, der behauptet, daß die harmonisch umbeschriebenen Kreise eines Kegelschnittes zu seinem Mongeschen Kreis orthogonal sind. Mehr noch, der Satz von Steiner kennzeichnet die Kegelschnitte. — Verf. verallgemeinert nachher diesen Satz für die Mittelpunktsquadranten  $F_{n-1}$  aus einem euklidischen  $R_n$ , indem er beweist, daß der Halbmesser einer Hyperkugel, die  $F_{n-1}$  tangiert und die deren orthoptische Hyperkugel orthogonal schneidet, gleich der Summe der  $(n-1)$  Hauptkrümmungsradien im Berührungspunkt ist.

*D. Barbilian* (Bukarest).

**Kárteszi, F.:** Über das System der gleichseitigen Hyperbeln, die eine Parabel hyperoskulieren. Mat. fiz. Lap. **48**, 193—201 u. dtsh. Zusammenfassung 201—202 (1941) [Ungarisch].

In Weiterführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **23**, 158) betrachtet Verf. das einparametrische System aller gleichseitigen Hyperbeln, die die Parabel  $y^2 = x$  hyperoskulieren; es ist vom Index 4, d. h. durch einen allgemeinen Punkt der Ebene gehen 4 Hyperbeln der Schar. Die Mittelpunkte der Hyperbeln erfüllen die Parabel  $x + y^2 + \frac{1}{2} = 0$ . Die Selbstberührungslinie  $S$  des Systems, d. h. der Ort der Berührungspunkte zweier verschiedener Scharkurven, ist eine  $C^4$  der Klasse 3; die von den gemeinsamen Tangenten der Scharkurven in den Punkten von  $S$  umhüllte Kurve ist eine  $C^6$  der Klasse 5. Durch eine Kollineation kann man die betrachtete Schar in das System derjenigen  $C^2$  verwandeln, die einen Kreis berühren und eine seiner Tangenten in Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden zum Kreismittelpunkt einen rechten Winkel bilden; die Selbstberührungslinie dieses Systems ist eine Cardoide.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Li, En-Po:** Die 28 Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung. Math. Ann. **118**, 94—111 (1941).

Eine ebene, doppelpunktfreie Kurve 4. Ordnung hat 28 Doppeltangenten. Jedes Doppeltangentenpaar bestimmt eine „Steinersche Gruppe“ von 6 Doppeltangentenpaaren derart, daß die 8 Berührungspunkte von irgend 2 Paaren der „Gruppe“ immer auf einem Kegelschnitt liegen. Werden die Doppeltangenten nach Hesse mit Doppelnummern  $\overline{jk}$  bezeichnet ( $j, k = 1, 2, \dots, 8; j \neq k$ ), so kann man die 63 Steinerschen Gruppen nach M. Noether mit  $\{jk\}$  und  $\{jklm\}$  bezeichnen. Unter Hinzunahme der 1 bilden die 63 Steinerschen Gruppen eine abelsche Gruppe vom Typus  $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ . Die Multiplikation in dieser Gruppe wird folgendermaßen erklärt: Aus zwei vorgegebenen Steinerschen Gruppen kann man immer zwei Doppeltangentenpaare, auswählen, die eine Doppeltangente gemeinsam haben. Die beiden übrigen Doppeltangenten gehören einer bestimmten Steinerschen Gruppe an, die Verf. als Produkt der beiden vorgegebenen bezeichnet; er gibt auch eine einfache Regel an, nach der das Noethersche Symbol der Produktgruppe berechnet werden kann. Je  $n-1$  Steinersche Gruppen, von denen keine die Produktgruppe von  $m$  ( $m < n-1$ ) aus den übrigen ist, bilden mit ihrer Produktgruppe ein Steinersystem  $S[n]$ . Die charakteristische Eigenschaft dieser Steinersysteme ist: Wählt man aus jeder der  $n$  Steinerschen Gruppen des Systems  $S[n]$  ein beliebiges Doppeltangentenpaar, so werden die  $4^n$  Berührungspunkte dieser  $2n$  Doppeltangenten stets von einer Kurve  $n$ . Ordnung ausgeschnitten. Die Zahl  $n$  kann alle Werte von 2 bis 8 annehmen. Damit ist eine Reihe von Sätzen bewiesen, die Steiner (J. reine angew. Math. **49**, 265) ohne Beweise ausgesprochen hat. Die Anzahl der Systeme  $S[n]$  ist leicht zu bestimmen; die Systeme  $S[3]$  und  $S[4]$

werden sämtlich aufgezählt. Schließlich werden noch einige Sätze über die Schnittpunkte der eben genannten  $2n$  Doppeltangenten bewiesen. *van der Waerden.*

**Perron, Oskar:** Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. *Math. Z.* 47, 318—324 (1941).

Nach einem Satz von Kronecker ist jede algebraische Raumkurve als Durchschnitt von höchstens 4 algebraischen Flächen darstellbar.

Es sei gestattet, den einfachen Beweis, den der Ref. für diesen Satz gefunden hat, kurz zu skizzieren. Zwei durch die Kurve gelegte Flächen schneiden sich außerdem nach einer Restkurve. Eine dritte kann so gewählt werden, daß sie die Restkurve nur in endlichvielen Punkten schneidet. Eine vierte kann so gewählt werden, daß sie diese Punkte nicht enthält. Genau so beweist man allgemein, daß jede algebraische Mannigfaltigkeit im  $S_n$  durch höchstens  $n + 1$  Gleichungen dargestellt werden kann.

Die Frage, ob bereits 3 oder gar 2 Flächen hinreichen, ist ungelöst. Eine kubische Raumkurve läßt sich als Durchschnitt von 2 Flächen darstellen, ebenso eine Raumkurve 5. Ordnung mit Quadrisekante (entgegen einer Behauptung Vahlens) als Durchschnitt von 3 Flächen 5. Ordnung. *van der Waerden* (Leipzig).

**Comessatti, Annibale:** Intorno ad un classico problema di unisecanti. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s., 2, 97—104 (1940).

$F$  sei eine algebraische Fläche  $n$ -ter Ordnung des  $S_3$ , die eine  $(n - 2)$ -fache Gerade  $r$  trägt; dann schneiden die Ebenen durch  $r$  auf  $F$  ein Kegelschnittbüschel  $|\Phi|$  aus, und es ist bekannt, daß es auf  $F$  immer rationale Kurven gibt, die jede  $\Phi$  in je einem Punkte schneiden. Ziel des Verf. ist ein neuer Beweis mit direkten und elementaren algebraischen Mitteln für die Existenz dieser Unisekanten und zugleich ihre tatsächliche Bestimmung. — Wählt man der Einfachheit halber  $r$  als Ferngerade der Ebene  $z = 0$ , so nimmt die Gleichung von  $F$  die Form an

$$(1) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \dots + a_{33} = 0,$$

worin die Koeffizienten  $a_{ik}$  rationale Funktionen in  $z$  sind. In dieser Gleichung sehen wir nur  $x$  und  $y$  als Unbekannte an; dann läuft die gestellte Aufgabe auf die Bestimmung einer Lösung von (1) hinaus, in der  $x = x(z)$  und  $y = y(z)$  rationale Funktionen in  $z$  sind. — Verf. beginnt mit einigen unmittelbar zu behandelnden Spezialfällen, nämlich 1. dem, in dem die Kurven  $\Phi$  als Unisekante die Ferngerade einer Koordinatenebene (z. B.  $y = 0$ ) besitzen, und 2. dem, in dem die  $\Phi$  sämtlich Parabeln sind, auf deren jeder der Fernpunkt rational bestimmbar ist. Es handelt sich also um die Fälle, in denen (1) in einer der Variablen (z. B.  $x$ ) vom ersten Grade ist oder für jeden Wert von  $z$  die quadratische Invariante  $A_{33}$  verschwindet. — Im allgemeinen Falle führt Verf. durch eine geeignete lineare Substitution in  $x$  und  $y$  die Aufgabe darauf zurück, drei Polynome  $P, Q, R$  in  $z$  zu bestimmen, zwischen denen die Identität  $(2) AP^2 + BQ^2 = R^2$  gilt, in der  $A$  und  $B$  rationale Funktionen von  $z$  bezeichnen. Zunächst wird die Existenz derartiger Polynome durch eine (einwandfreie!) Konstantenabzählung nachgewiesen; zur tatsächlichen Herstellung von  $P, Q, R$  gelangt man mittels eines auf rationalen Rechenoperationen und der Lösung passender algebraischer Gleichungen beruhenden schrittweisen Reduktionsprozesses. Sieht man in (2)  $A, B, P, Q$  und  $R$  als ganze Zahlen an, so handelt es sich um eine diophantische Gleichung 2. Grades, für die Lagrange eine Lösungsmethode entwickelt hat, der auch die Lösung des Verf. Anregung verdankt. Der Vergleich des Lagrangeschen Falles mit dem vorliegenden Problem führt Verf. zu weiteren interessanten Bemerkungen. — Anlaß zu dieser Untersuchung war der Wunsch einer Vereinfachung des Beweises des klassischen Noetherschen Satzes, der die Rationalität einer Fläche, die ein rationales Kurvenbüschel trägt, zum Inhalt hat. Bekanntlich kann man eine derartige Fläche auf eine  $F$  der oben genannten Form zurückführen, und der Beweis erfordert den Nachweis der Existenz einer Unisekanten für alle Kegelschnitte  $\Phi$ . M. Noether und Clebsch verdankt man zwei verschiedene Arten, diese Aufgaben anzugreifen; aber beide sind sowohl begrifflich als auch in der Durchführung der einzelnen Schlüsse schwierig. Daher beansprucht



vorliegende Abhandlung, die das Problem mit wesentlich einfacheren Mitteln erledigt, Interesse.

*L. Campedelli* (Firenze).

**Purcell, Edwin J.:** A multiple null-correspondence and a space Cremona involution of order  $2n - 1$ . Bull. Amer. Math. Soc. 46, 339—344 (1940).

I. Zwei Strahlenkongruenzen 1. Ordnung sind gegeben; die erste besteht aus allen Geraden, die eine Kurve  $\delta_m$  der Ordnung  $m$  und eine  $\delta_m (m - 1)$ -mal schneidende Gerade  $d$  treffen; die zweite wird ähnlicherweise aus einer Kurve  $\delta'_n$  und einer Geraden  $d'$  konstruiert. Jedem Punkt  $P$  des Raumes läßt man dann die Ebene entsprechen, die die zwei von  $P$  ausgehenden Geraden  $r, r'$  der beiden Kongruenzen enthält. Man erhält so eine  $(mn, 1)$ -Nullverwandtschaft, die hier studiert wird. Der Gedanke ist nicht neu (s. L. Berzolari, Enzykl. d. math. Wiss., III C 11, Fußnote <sup>893</sup> zu S. 2135—2136; dies. Zbl. 8, 80). — II. Fallen  $\delta_n, \delta'_n$  zusammen, sind  $d, d'$  windschief und bedeuten  $A, D; B, D'$  die Punkte  $r\delta_n, rd; r'\delta_n, r'd'$ , so kann man dem Punkt  $P$  den Punkt  $P' \equiv AD' \cdot BD$  entsprechen lassen. Man erhält so eine Cremonasche Transformation der Ordnung  $2n - 1$ .

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Hollerott, T. R.:** Anomalous plane curve systems associated with singular surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 252—257 (1940).

Die erste virtuelle Dimension  $d_0$  eines ebenen irreduziblen vollständigen Systems algebraischer Kurven ist diejenige, die man berechnet, wenn die Multiplizitätsbedingungen, die den Kurven des Systems auferlegt sind, als alle voneinander unabhängig angesehen werden. Die virtuelle Dimension  $d_0$  ist nie kleiner als die wirkliche Dimension  $d$ ; die Differenz  $d_0 - d$  wird mit  $A$  bezeichnet. Verf. bestimmt hier den Wert von  $A$  für das System der scheinbaren Umrissse einer Fläche  $F^v$  der Ordnung  $v$  bei Projektion von den verschiedenen Punkten des Raumes aus auf eine Ebene. Den allgemeinen Fall einer singularitätenfreien Fläche  $F^v$  hat schon B. Segre behandelt [Mem. Accad. Ital. 1, 5—31 (1930)]; hier werden folgende anderen Fälle untersucht: 1)  $F^v$  hat einen  $k$ -fachen Punkt allgemeiner Art, oder  $\alpha$  getrennte unabhängige mehrfache Punkte mit den Multiplizitäten  $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ ; 2)  $F^v$  hat eine Doppelgerade; 3)  $F^v$  hat eine Kuspidalgerade. Im 1. Falle findet man ( $i = 1, 2, \dots, \alpha$ ):

$$A = \frac{1}{6} (v - 2)(v - 3)(v - 4) - \frac{1}{6} \sum (k_i - 1)(k_i - 2)(k_i - 3);$$

im 2. und 3. Falle hat man immer:  $A = \frac{1}{6} v(v - 4)(v - 5)$ . Als Anwendung der ersten dieser Formeln findet man unter anderem, daß  $F^v$  nicht mehr als  $\frac{(v - 2)(v - 3)(v - 4)}{(k - 1)(k - 2)(k - 3)}$  unabhängige getrennte  $k$ -fache Punkte besitzen kann, sobald  $k \geq 4$  ist. *E. G. Togliatti*.

**Godeaux, Lucien:** Sur une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genre quatre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 9—17 (1940).

Die algebraische Fläche  $F$  sei Träger einer Involution  $n$ -ter Ordnung  $J_n$ , deren Gruppen birational den Punkten einer Fläche  $\Phi$  entsprechen. Nach F. Enriques entspricht einer kanonischen Kurve von  $\Phi$  auf  $F$  eine Kurve, die zusammen mit der Deckkurve der  $J_n$  eine kanonische Kurve von  $F$  liefert. Man darf aber nicht umgekehrt aus der Existenz einer kanonischen Kurve auf  $F$  bei einer  $J_n$ , die nur endlich-viele Ruhepunkte in einfachen Punkten von  $F$  besitzt, auf die Existenz einer kanonischen Kurve auf  $\Phi$  schließen, wie folgendes Beispiel zeigt.  $F^5$  habe die Gleichung  $a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_4 + a_4 x_4^4 x_1 = 0$ , also die Geschlechter  $p_a = p_g = 4$ ,  $p^{(1)} = 6$ ,  $P_2 = 10$  und keine mehrfachen Punkte.  $J_{17}$  werde auf  $F^5$  durch die automorphe Projektivität  $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{14} x_3 : \varepsilon^{13} x_4$ ,  $\varepsilon = 17$ . primitive Einheitswurzel, bestimmt. Die Ecken des Bezugstetraeders  $O_i$  sind die Ruhepunkte der  $J_{17}$ . Die Bildfläche  $\Phi$  hingegen ist rational; den  $O_i$  entsprechen auf  $\Phi$  fünffache Punkte, deren Berührungskegel in je einen rationalen kubischen und quadratischen Kegel mit einer gemeinsamen Erzeugenden zerfallen; jedem solchen Punkt liegt ein konischer Doppelpunkt von  $\Phi$  benachbart. Einer kanonischen bzw. bikanonischen Kurve von  $\Phi$  müßte auf  $F$  eine kanonische bzw. bikanonische Kurve mit lauter 3- bzw. 6fachen Punkten

in den  $O_i$  entsprechen, die es aber nicht gibt, woraus die Rationalität von  $\Phi$  zu schließen ist. Das Beispiel kann verallgemeinert werden. Harald Geppert (Berlin).

### **Differentialgeometrie:**

**Hirvonen, R. A.:** Herleitung einer Differentialformel für die geodätische Linie. Z. Vermessungswes., Stuttgart. **70**, 178—179 (1941).

Die geodätische Linie  $P_1P_2$  mit dem Anfangsazimut  $a_1$  und der Länge  $s$  drehe sich um  $P_1$  um den kleinen Winkel  $d\alpha_1$ . Die Veränderung des Azimuts  $a_2$  im Punkte  $P_2$  wird auf einfachstem Wege mit differentialgeometrischen Hilfsmitteln bestimmt.

U. Graf (Danzig).

**Myller, A.:** Une surface remarquable engendrée par la tractrice. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **26**, 390—393 (1940).

Verschraubt man eine Schleppkurve um ihre Asymptote in allgemeiner Weise, so erhält man eine Fläche, deren eine Krümmungslinienschar von den Ebenen durch die Schraubachse ausgeschnitten wird; die andere Schar wird von Kugeln mit den Mittelpunkten auf der Schraubachse ausgeschnitten. Durch Hüllenbildung aus solchen Flächen erhält man die allgemeinen Flächen, deren Krümmungslinien durch ein Ebenenbüschel ausgeschnitten werden. Harald Geppert (Berlin).

**Cotton, Émile:** Sur le calcul des invariants différentiels euclidiens d'une surface. J. Math. pures appl., IX. s. **19**, 211—220 (1940).

Es sei  $z = f(x, y) = f_2(x, y) + \dots + f_\alpha(x, y) + \dots$  die Gleichung einer analytischen Fläche, bezogen auf das rechtwinklige Koordinatensystem  $Mxyz$ , dessen Ursprung  $M$  in der Fläche liegt und dessen  $z$ -Achse senkrecht zu ihr steht;  $f_\alpha(x, y)$  ist ein homogenes Polynom vom Grade  $\alpha$ . Die Arbeit beschäftigt sich zuerst mit der Bestimmung dieser Polynome, wenn die Fläche parametrisch gegeben ist. Zur übersichtlichen Durchführung der dabei auftretenden Differentiationen und Eliminationen gibt der Autor zwei Methoden an. Die erste beruht auf einfachen kinematischen Überlegungen, die zweite benutzt die Cartansche Methode des bewegten Bezugssystems. Durch gewisse Substitutionen, die durch die Reduktion zweier quadratischer Formen auf die Normalform erhalten werden, kommt man zu den endgültigen Polynomen, deren Koeffizienten ein vollständiges System von Invarianten liefern. Die Rechnungen können leicht auf  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten der Klasse 1 ausgedehnt werden. Bei dieser Gelegenheit wird ein einfacher Beweis der Bedingungen gegeben, die eine Mannigfaltigkeit erfüllen muß, damit sie von der Klasse 1 sei. Aus den Rechnungen kann man auch die Ableitungsformeln von Weingarten und Gauss bequem folgern, ebenso die Abhängigkeit der dritten Fundamentalform von den beiden ersten. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über die Ausdehnung der benutzten Methoden auf Mannigfaltigkeiten, deren Klasse größer als 1 ist. R. Ulrich (Prag).

**Graustein, W. C.:** Harmonic minimal surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 173—206 (1940).

A minimal surface in a Euclidean space is harmonic if it is representable in terms of Cartesian coordinates  $(x_1, x_2, x_3)$  by an equation of the form  $U(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ , where  $U$  is a harmonic function. The problem of the determination of all harmonic minimal surfaces is equivalent to the problem in hydrodynamics of determining all stationary irrotational flows of a frictionless incompressible liquid with the special property that the velocity along an arbitrary line of flow is constant along this line. Hamel (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1937**, 5—20; this Zbl. **16**, 257) has solved this problem in two ways. His first method demands in itself that the function under consideration be real. The second method puts no restriction on the function involved and, since it appears to lead to the same results as the first, one is tempted to assume that all solutions  $U(x_1, x_2, x_3)$  of the problem are real. Actually, there exist imaginary solutions and they are geometrically far more intriguing than the real solutions. It is shown in this paper that all solutions, real and imaginary, except those with



isotropic gradients, are reducible by means of a change of coordinate-axes and an integral linear transformation on the function itself, to one of the following forms:

$$(I) \quad U = \tan^{-1}(x_2/x_3) + ax_1, \quad (IIa) \quad (2zU + ix_1)^2 = z \tan(4zU^2 + 4ix_1U + \bar{z}),$$

$$(IIb) \quad z^4U^6 + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

$$(III) \quad U = - \int \frac{dy}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{2}{3} \int \frac{du}{(1+u^2)^{5/6}}, \quad 1+u^2 = \frac{1}{y^3},$$

$(z^2 - 2ix_1)^3u^2 + (z^3 - 3ix_1z + \frac{3}{2}\bar{z})^2 = 0$ , (IV)  $U = f(z)x_1 + \Phi(z)$ , where  $z = x_2 + ix_3$  and  $\bar{z} = x_2 - ix_3$  throughout. These results are geometrically interpreted. The paper splits into five parts. In Part A, the general case of the problem is formulated and the solutions of the secondary or scalar differential system are listed. In Part B, the primary or vector differential system is integrated in the various cases and the functions  $U$  are found. In Part C, the properties of the corresponding minimal surfaces  $U = \text{const.}$  are discussed. The deduction of the solution of the scalar differential system and the proof that there are no other solutions is given in Part D, and Part E is devoted to a special case, previously excluded, which gives rise to the solution (IV). It is assumed that all functions are analytic in the complex variables  $x_1, x_2, x_3$ .

Takasu (Sendai).

**Bompiani, Enrico:** Calotte a centri allineati di superficie algebriche. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 93—101 (1940).

Schneidet eine Gerade eine ebene algebraische Kurve in lauter verschiedenen Punkten, so besteht zwischen den Elementen zweiter Ordnung der Kurve in diesen Punkten eine Beziehung projektiven Charakters, die in metrischer Form von Reiss angegeben und später von Bäcklund und anderen wiedergefunden wurde. Verf. erweitert den Reiss'schen Satz auf die Kalotten zweiter Ordnung einer algebraischen Fläche  $F^n$  des  $S_3$ , deren Zentren verschieden sind und auf einer Geraden liegen. Zwischen solchen Kalotten gelten drei Beziehungen. Wählt man die Gerade, die die Zentren trägt, zur  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen  $P_i(0, 0, \gamma_i)$  die Schnittpunkte der  $z$ -Achse mit  $F^n$ , ist ferner die Kalotte zweiter Ordnung von  $F^n$  mit dem Zentrum  $P_i$  durch die Gleichung

$$z_i = \gamma_i + p_i x + q_i y + \frac{1}{2}(r_i x^2 + 2s_i xy + t_i y^2)$$

gegeben, so lauten die drei genannten Relationen folgendermaßen:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n r_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n t_i = 0.$$

Die metrische Deutung von (1) für  $n = 2$  gab Bompiani (dies. Zbl. 21, 352). Für  $n = 3$  lautet das Ergebnis des Verf. folgendermaßen: Sind  $P_1, P_2, P_3$  voneinander verschiedene, auf einer Geraden liegende Punkte einer kubischen Fläche  $F^3$ , die nicht Inflexionspunkte sind, so gehören die Ebenenpaare durch die Gerade einerseits und die Haupttangente in den  $P_i$  andererseits einer Involution an, und dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei durch die Punkte  $P_i$  gehende Geradenpaare in diesen die Haupttangente einer  $F^3$  seien; für diese  $F^3$  sind überdies die Verhältnisse der Gauß'schen Krümmung in den drei Punkten bestimmt. Ist genau einer der Punkte  $P_i$ , z. B.  $P_1$ , Inflexionspunkt und  $P_2 \neq P_3$ , so gibt es eine  $F^3$  in  $P_2$  und  $P_3$  in zweiter Ordnung berührende Quadrik, während, falls  $P_2 = P_3$  ist, die zum Punkte  $P_2$  und der Tangente  $P_1 P_2$  gehörige Moutard'sche Quadrik mit  $F^3$  in Richtung dieser Tangente eine Berührung fünfter Ordnung eingeht. Sind schließlich  $P_1$  und  $P_2$  Inflexionspunkte der  $F^3$ , so gilt das gleiche von  $P_3$ . — Für  $n > 3$  wird der metrische Inhalt der Gleichungen (1) durch folgenden Satz wiedergegeben, der nach Erledigung der Fälle  $n = 2$  und  $n = 3$  eine tatsächliche konstruktive Bedeutung besitzt: Notwendig und hinreichend dafür, daß  $n$  Kalotten zweiter Ordnung, deren Zentren auf einer Geraden liegen, der gleichen algebraischen Fläche  $F^n$  angehören, ist, daß bei beliebiger Wahl von  $j$  und  $j' = n - j$  dieser Kalotten und darauf folgender Konstruktion irgendeiner  $F^{j+1}$  bzw.  $F^{j'+1}$ , die diese Kalottengruppen enthält, die restlichen

Kalotten von  $F^{j+1}$  und  $F^{j'+1}$ , deren Zentren auf der gegebenen Geraden liegen, einer Quadrik angehören. Sind  $x, y, z$  rechtwinklige kartesische Koordinaten,  $L_i, M_i, N_i$  die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform bezüglich der Kalotte in  $P_i$  und schließlich  $\omega_i$  der Winkel der Flächennormalen mit der Geraden der Zentren in  $P_i$ , so kann man den Gleichungen (1) die metrische Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\cos \omega_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\cos \omega_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\cos \omega_i} = 0$$

geben, aus der folgt

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} + \sum_{i \neq k=1}^n \frac{L_i N_k - M_i M_k}{\cos \omega_i \cdot \cos \omega_k},$$

worin  $K_i$  das Gaußsche Krümmungsmaß der zu  $P_i$  gehörigen Kalotte bedeutet. Schließlich deutet Verf. eine Erweiterung dieser Ergebnisse auf Kalotten einer algebraischen Hyperfläche  $V_{r-1}^n$  des  $S_r$ , deren Zentren auf einer Geraden liegen, an. *Mario Villa.*

**Finikoff, S.: Réseaux de Rozet.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 151—176 u. franz. Zusammenfassung 177—180 (1940) [Russisch].

Eine Geradenkongruenz von Rozet ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Punkte  $A, A_u, A_{uv}, B_v$  in einer Ebene liegen; dabei bedeuten  $A, B$  die Brennpunkte einer Kongruenzgeraden,  $u, v$  die Torsen und  $A_u$  usw. den durch die Laplace'sche Transformation in der Richtung  $u$  abgeleiteten Bildpunkt von  $A$ . Die entsprechenden Netze  $(A), (B)$  werden als Netze von Rozet bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften solcher Geradenkongruenzen und Netze eingehend untersucht; z. B. liegt jede  $W$ -Kongruenz von Rozet in einem linearen Komplex, und jede in einem linearen Komplex liegende Kongruenz ist die von Rozet. *O. Borůvka.*

**Takeda, K.: On line congruences.** 5. Tôhoku Math. J. 47, 181—187 (1940).

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen [Tôhoku Math. J. 46, 267—283 (1940); dies. Zbl. 23, 71] fort und behandelt die Laplaceschen Transformierten einer Kongruenz  $K$ . Zuerst werden die Fundamentalgrößen und -formen in asymptotischen Parametern berechnet und auf spezielle Fälle angewandt. Ist  $K$  ein  $W$ -System, so sind die zweiten Transformierten in jeder Richtung  $W$ -Systeme, die ersten Transformierten brauchen es nicht zu sein. Ferner wird der Fall betrachtet, daß das projektive Linien-element von  $K$  bei der Laplaceschen Transformation nach beiden Richtungen erhalten bleibt. *W. Haack (Karlsruhe).*

**Takasu, Tsurusaburo: Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien.** Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 333—340 (1940).

In dieser Arbeit behandelt Verf. die drei Geometrien zu den Transformationsgruppen

$$z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \bar{z}^* = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \text{ kein Nullteiler}),$$

wobei die Koeffizienten hyperkomplexe Zahlen  $x + my$  ( $m^2 = -1, m^2 = 1, m^2 = 0$ ) sind. — Die einfachsten Kurven in diesen Geometrien sind bzw. Kreise, rechtwinklige Hyperbeln, Parabeln. Zuerst behandelt Verf. die Geometrien mit Hilfe obiger linearer Transformationen, und dann unter Verwendung der tetrazyklischen, der tetrahyperbolischen und der tetraparabolischen Koordinaten. — Diese Geometrien nennt Verf. bzw. elliptisch konforme, hyperbolisch konforme, parabolisch konforme Geometrie.

*Tadahiko Kubota (Sendai).*

**Takasu, Tsurusaburo: Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien.** Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 341—345 (1940).

Die Liesche Berührungstransformationsgruppe der orientierten Kreise in der Ebene verallgemeinernd, betrachtet der Verf. die entsprechenden Berührungstransformationsgruppen der orientierten rechtwinkligen Hyperbeln mit parallelen Asymptoten und der



orientierten Parabeln mit parallelen Achsen. Er untersucht die entsprechenden Geometrien im Kleinschen Sinne durch Verallgemeinerung des gewöhnlichen Winkelbegriffs und unter Verwendung der hyperkomplexen Zahlen  $x + my$  ( $m^2 = -1$ ,  $+1, 0$ ).

*Tadahiko Kubota* (Sendai).

**Takasu, Tsurusaburo:** Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 346—349 (1940).

Behandlung der entsprechenden Fragen im Raum im Anschluß an die vorangehend besprochene Arbeit.

*Tadahiko Kubota* (Sendai).

**Kubota, Tadahiko:** Einige Bemerkungen zur Takasuschen Arbeit über  $L$ -Minimalflächen. Tôhoku Math. J. **47**, 172—176 (1940).

1. Ref. hat in Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **22**, 697—781 (1933) (dies. Zbl. **7**, 424) einen allgemeineren Satz zur Bestimmung der reellen analytischen Doppel- $L$ -Minimalflächen mit Heranziehung der Mittenkugeln bewiesen. Verf. beweist den folgenden Satz mit Benutzung der Bonnetschen Ebenenkoordinaten  $u, v, w$  ohne Heranziehung der Mittenkugeln unmittelbar: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die analytischen Doppel- $L$ -Minimalflächen  $w = U(u)v + V(v)u + U_1(u) + V_1(v)$  ist  $U_1(u) = uV(-\frac{1}{u})$ .

2. Ref. hat ebenda einen Satz zur Bestimmung der algebraischen  $L$ -Minimalflächen gegeben, der dem Weierstraßschen analog und selbst für imaginäre algebraische  $L$ -Minimalflächen gültig ist. Verf. gibt einen anderen Beweis für reelle algebraische  $L$ -Minimalflächen mit Benutzung des Weierstraßschen Hilfssatzes. 3. Ref. hat ebenda (S. 1127; dies. Zbl. **12**, 313) zum Zwecke der Laguerre-geometrischen Verallgemeinerung der Aufgabe von E. G. Björling die sogenannten Schwarzschen Formeln für  $L$ -Minimalflächen mit Benutzung der Tangentialebenen der beiden Hüllflächen Laguerre-geometrisch verallgemeinert und einen Satz über geradensymmetrische Minimalflächen auf den Fall der  $L$ -Minimalflächen verallgemeinert. Verf. beweist die Schwarzschen Formeln mit Benutzung des euklidischen  $R_{n+1}$  in anderer Form (ohne Benutzung der beiden Tangentialebenen) für den Raum  $R_n$  und verallgemeinert dann die bekannten Sätze über geradensymmetrische und ebenensymmetrische Minimalflächen auf den Fall der  $L$ -Minimalflächen im  $R_n$ .

*Takasu* (Sendai).

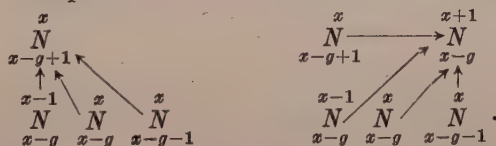
**Schwartz, Abraham:** The Gauss-Codazzi-Ricci equations in Riemannian manifolds. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 30—79 (1941).

Let  $K_{\omega\mu\lambda\nu}$  be the Riemann-Christoffel affinator for a  $V_n$ . One gets the Gauss (Codazzi, Ricci)-equations for a  $V_m$  in our  $V_n$  by expressing the components of  $B_\rho^\omega B_\sigma^\mu K_{\omega\mu\lambda\nu}$  in different normal spaces of  $V_m$  by means of the Euler-Schouten

affinors and the mixed "curvature" affinors. Such an equation will be denoted by  $\overset{y}{N}_z$ , where the upper (lower) label indicates the  $y$ -th ( $z$ -th) normal space with which the transvection on the third (fourth) index of the affinator  $B_\rho^\omega B_\sigma^\mu K_{\omega\mu\lambda\nu}$  is concerned. This

paper deals mainly with the relationships between different  $N$ : If  $\overset{Q}{R} \rightarrow \overset{P}{S}$  be taken

to mean that  $P$  is a consequence of  $Q, R, S$ , then the following diagram holds (under some conditions)



Another interesting result: If the  $(x+1)$ -th normal space is of one dimension only, then (under some conditions) the Codazzi-equation  $\overset{x+1}{N}_x$  is a consequence of the Gauss-

equation  $\overset{x}{N}$  and the Codazzi-equation  $\overset{x}{N}_{x-1}$ . [See also the theorem by T. Y. Thomas, Acta math. **67**, 169—211 (1936), p. 189; this Zbl. **15**, 273, which is a very special case of this result.] Hlavatý (Prag).

**Rosenon, N.:** Sur les espaces Riemanniens de classe I. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **4**, 181—191 u. franz. Zusammenfassung 192 (1940) [Russisch].

Ein Riemannscher Raum  $V_n$  mit der Fundamentalform  $ds^2 = \sum_1^n g_{ij} dx^i dx^j$  heißt von der Klasse I, wenn er in einen euklidischen  $R_{n+1}$  eingebettet, d. h.  $ds^2 = \sum_1^{n+1} dy^i$  mit  $y^i = f^i(x^1 \dots x^n)$  gemacht werden kann. Hierfür ermittelt Verf. notwendige Bedingungen in Gestalt eines Systems von Tensorgleichungen, in die neben dem Riemannschen Krümmungstensor ein willkürlicher symmetrischer kontravarianter Tensor 2. Stufe eingeht. Weiterhin drückt Verf. einige Simultaninvarianten der beiden quadratischen Fundamentalformen von  $V_n$  mittels der Komponenten des Riemannschen und des metrischen Tensors aus und gibt für eine derselben durch Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes eine geometrische Deutung. Harald Geppert (Berlin).

**Mira Fernandes, A. de:** Assiomatiza degli spazi di elemento lineare. Portugaliae Math. **2**, 7—12 (1941).

$C_{k..h}^{..i}$  seien die Cartanschen Übertragungskoeffizienten der Finslerschen Übertragung, welche den Cartanschen 5 Axiomen genügt (É. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris 1934; dies. Zbl. **8**, 418). Der Verf. zeigt, daß 3 von diesen Axiomen durch eine einzige Bedingung ersetzt werden können:  $C_{kih}$  sind in allen Indizes symmetrisch; die gleiche Reduktion wurde schon von L. Berwald, Čas. mat. fys. **64**, 1—16 (1935), insbes. S. 10, (dies. Zbl. **11**, 133) angegeben. Hlavatý (Prag).

**Berwald, L.:** On Finsler and Cartan geometries. 3. Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals. Ann. of Math., II. s. **42**, 84—112 (1941).

Let (1)  $\frac{dl^i}{ds} + 2 \frac{G^i(x, x')}{F^2(x, x')} = 0$  (with  $l^i = \frac{dx^i}{ds}$ ) be the equation of the variational problem  $\delta s \equiv \delta \int F(x, x') dt = 0$  of the two-dimensional Finsler space. Supposing that these extremals are rectilinear it is evident that in a suitable chosen coordinate system (1) is equivalent to (2)  $G^i = F^2 q l^i$ ,  $q$  being a function of  $x, x'$ , positively homogeneous of degree zero in  $x'$ . Let us denote by  $A = 0, B = 0$  the conditions of integrability of (2): The necessary and sufficient condition that  $G^i$  may be projectively changed in quadratic polynomials in  $x'$  is  $A = 0$ . The necessary and sufficient condition that a projective change of  $G^i$  may reduce our space to a flat one is  $B = 0$ . — The last section is devoted to the construction of all six types of two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals the main scalar of which is a function of position only (being then necessarily a constant). Finally all Landsberg spaces with rectilinear extremals are determined. Hlavatý (Prag).

**Cisotti, Fabio:** Superficie indicatrici delle derivate di direzione. Period. Mat., IV. s. **21**, 128—131 (1941).

**Manarini, M.:** Estensione della formula del doppio prodotto vettoriale agli spazi a più di tre dimensioni. Una formula di calcolo integrale ed un teorema della divergenza per i bivettori. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **10**, 1—20 (1939).

Es wird eine Verallgemeinerung des doppelten Vektorproduktes im 4-dimensionalen Raum unter Benutzung der italienischen Symbolik durchgeführt. Ein nichthomogenes System mit 4 Unbekannten wird mit Hilfe dieser Formel aufgelöst. Ferner beweist Verf. den Gaußschen Integralsatz der Vektoranalysis für eine differenzierbare Kollineation  $\alpha(P)$  unter Anwendung der erwähnten Symbolik. Die Arbeit steht in engem Zusammenhang mit früheren Arbeiten des Verf. (s. dies. Zbl. **7**, 254). Yannopoulos.



**Cisotti, Umberto:** Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 337—341 (1940).

$A^{\alpha_1 \dots \alpha_{2m}}$  sei die  $m$ -te Potenz des metrischen Tensors  $a^{\alpha\beta}$  einer  $V_n$  ( $n = 2p + 1$ ),  $B^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ , ( $k = 2m + n - 2$ ) sei ein allgemeines Produkt einer  $A$  und der Riccischen  $n$ -Vektordichte  $e^{\nu_1 \dots \nu_n}$ . Wenn  $T_{\lambda_1 \dots \lambda_{2m}}$  bzw.  $P_{\lambda_1 \dots \lambda_k}$  Tensoren sind, dann ist  $T_{\lambda_1 \dots \lambda_{2m}} A^{\lambda_1 \dots \lambda_{2m}}$  eine skalare Invariante und  $P_{\lambda_1 \dots \lambda_k} B^{\lambda_1 \dots \lambda_k}$  eine skalare Dichte. Verf. beschränkt sich auf den Fall  $n = 3$  des euklidischen Raumes, bezogen auf orthogonale cartesische Koordinaten und schreibt die einzelnen Fälle für  $m = 1, 2, 3$  explizit auf. Hlavatý (Prag).

### **Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:**

**Denk, Franz, und Otto Haupt:** Über die Singularitäten reeller Bogen im  $R_n$ . J. reine angew. Math. 183, 69—91 (1941).

Bezeichne  $\mathfrak{B}$  ein eindeutiges, stetiges Streckenbild im projektiven  $R_n$ . Die maximale Mächtigkeit des Durchschnittes von  $\mathfrak{B}$  mit einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene des  $R_n$  heißt die Ordnung von  $\mathfrak{B}$ . Das Minimum der Ordnungen aller Umgebungen eines Punktes  $P$  heißt die Ordnung von  $P$ . Die orientierte Darstellung von  $\mathfrak{B}$  als Streckenbild bestimmt eine Zerlegung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+ + \mathfrak{B}^-$  von  $\mathfrak{B}$  in zwei Summanden, von welchen  $\mathfrak{B}^-$  das Bild des Anfangspunktes und  $P$ , während  $\mathfrak{B}^+$  das Bild des Endpunktes und  $P$  enthält.  $P$  heißt (auf der Summe  $\mathfrak{B}^+ + \mathfrak{B}^-$ ) singulär. Es wird gefragt nach einer Mindestordnung eines singulären Punktes. Zur Beantwortung dieser Frage werden die singulären Punkte durch Betrachtung der verschieden-dimensionalen Tangentialschmiegebenen bzw. Halbebenen von  $\mathfrak{B}$  in Typen eingereiht. Dann wird vor allem gezeigt, daß die Mindestordnung eines allgemeinen singulären Punktes je nach seinem Typus  $n + 1$  oder  $n$  ist. Dieses Resultat wird für Punkte, in welchen die rechts- und linksseitigen Tangentialschmiegebenen miteinander übereinstimmen, noch verfeinert. G. Alexits (Budapest).

**Jessen, Børge:** Zwei Sätze über konvexe Punktmengen. Mat. Tidsskr. B 1940, 66—70 [Dänisch].

1. Eine geschlossene konvexe Punktmenge  $K$  des  $n$ -dimensionalen Raumes kann durch die Eigenschaft gekennzeichnet werden, daß sie zu jedem Punkt außerhalb  $K$  genau einen nächsten Punkt enthält. 2. Durch die Eigenschaft, zu jedem außerhalb gelegenen Punkt genau einen fernsten Punkt zu enthalten, sind solche begrenzten, geschlossenen, konvexen Punktmengen gekennzeichnet, die innere Punkte enthalten und bei denen sämtliche Oskulationszentren des Randes zur Menge gehören. Hierzu gehören z. B. die Körper konstanter Breite, aber nicht nur diese. Gerike.

**Gerike, H.:** Zur Relativ-Geometrie ebener Kurven. Math. Z. 47, 215—228 (1941).

Zur Beschreibung der ebenen Kurve  $\mathfrak{x}(\varphi)$  werde die durch parallele Normalen bezogene Eichkurve  $e(\varphi)$  benutzt, wobei  $\varphi$  den Winkel der äußeren Normalen  $n$  mit einer festen Richtung bezeichnet. Die Stützfunktionen dieser Kurven seien  $h(\varphi) = \mathfrak{x} \cdot n$ ,  $k(\varphi) = e \cdot n$ . Als Relativ- $(R)$ -Bogenlänge von  $\mathfrak{x}$  definiert man  $\sigma = \int (e, \dot{\mathfrak{x}}) d\varphi$ , als  $R$ -Winkel die  $R$ -Bogenlänge von  $e$ ,  $\psi = \int (e, \dot{e}) d\varphi$ .  $\varrho = \frac{d\sigma}{d\psi} = \frac{r(\mathfrak{x})}{r(e)}$  ist der  $R$ -Krümmungsradius von  $\mathfrak{x}$ , wenn  $r$  den gewöhnlichen Krümmungsradius bezeichnet.  $\varrho = \lambda = \text{konst.}$  ist gleichbedeutend mit  $hk^{-1} = \lambda$  und kennzeichnet die zu  $e$  homothetischen  $R$ -Kreise; sie haben den  $R$ -Umfang  $L = 2p\lambda$ , wenn  $2p$  der  $R$ -Umfang von  $e$  ist.  $\kappa = hk^{-1}$  ist die  $R$ -Stützfunktion von  $\mathfrak{x}$ ; bezeichnet man mit  $^0$  die Ableitung nach  $\psi$  und setzt  $k^3 r(e) = c(\psi)$ , so gilt in Analogie zum gewöhnlichen Falle

$$\varrho = \kappa + (c\kappa^0)^0, \quad L = \int_0^{2p} \kappa d\psi, \quad F = \frac{1}{2} \int_0^{2p} \kappa \varrho d\psi,$$

dabei ist der  $R$ -Flächeninhalt  $F$  mit dem gewöhnlichen Inhalt identifiziert. Der Fourier-

zerlegung der Stützfunktion im gewöhnlichen Falle entspricht jetzt die Entwicklung  $\kappa = \sum a_n \tilde{x}_n$  nach den orthonormierten Eigenfunktionen  $\tilde{x}_n$  der Gleichung

$$(c(\psi)y^0)^0 + \lambda y = 0, \quad \dot{y}(2p) = y(0), \quad y^0(2p) = y^0(0),$$

deren Eigenwerte  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$  nichtnegativ sind. In Analogie zu den Beweisen von Hurwitz und Dinghas (dies. Zbl. 22, 402) erhält man Abschätzungen des isoperimetrischen  $R$ -Defizits:

$$L^2 - 4pF + 4p^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - 1) a_n^2 \geq 0,$$

$$L^2 - 4pF \leq \frac{4p}{\lambda_3} \left( \frac{1}{2} \int \varrho^2 d\psi - F \right), \quad \int \varrho^2 d\psi \leq \frac{L^2}{2p}.$$

Die Deutung der Reihenentwicklung von  $\kappa$  als Basisdarstellung und die Kennzeichnung der Basisbereiche durch Extremaleigenschaften ist analog zu den Untersuchungen von Görtler (dies. Zbl. 17, 189; 18, 379). Die Ellipse als Eichkurve wird besonders betrachtet.

Harald Geppert (Berlin).

**Dinghas, Alexander:** Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den  $n$ -dimensionalen Raum. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 149, 399—432 (1940).

Ziel der Arbeit ist ein Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der  $n$ -dimensionalen Kugel im  $R_n$  unter alleiniger Benutzung einer Verschärfung und Erweiterung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung auf beliebige nichtkonvexe Mengen unter Vermeidung von Symmetrisierungsverfahren. Zugrunde gelegt wird dabei zunächst der Minkowskische Oberflächenbegriff, und dann wird durch Polyederapproximation das Ergebnis auf den Lebesgueschen Oberflächenbegriff bei den Körpern, die eine solche Approximation zulassen, erweitert. — Sind  $h_1, h_2$  zwei beliebige Punktmengen des  $R_n$ , deren Punkte die Koordinaten  $x_i$  bzw.  $y_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) haben, so bedeutet  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  die Menge der Punkte mit den Koordinaten  $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i$ . Der Brunn-Minkowskische Satz für solche Linearkombinationen wird durch Induktion bez. der Dimension bewiesen. Zunächst gilt in einer Dimension: Ist  $E_1$  eine aus endlichvielen abgeschlossenen Intervallen einer Geraden bestehende Menge,  $CE_1$  die dazu komplementäre Menge bez. des kleinsten,  $E_1$  enthaltenden Intervalls,  $E_2$  ein weiteres abgeschlossenes Intervall der Geraden, so ist ( $m = \text{Maß}$ ):

$$m(E_1 + hE_2) \geq mE_1 + h \cdot mE_2 + h \frac{mCE_1 \cdot mE_2}{mCE_1 + mE_2}, \quad 0 \leq h \leq 1.$$

Es folgt der Übergang auf zweidimensionale Jordan-meßbare Bereiche  $\mathfrak{F}$ ; es sei  $\mathfrak{F}_0$  der Kreis vom Radius  $R$ ,  $\mathfrak{F}_h = \mathfrak{F} + h\mathfrak{F}_0$ , und  $\mathfrak{F}$  in einem achsenparallelen Quadrat der Seite  $D$  eingeschlossen, dann gilt für die Flächeninhalte

$$(1) \quad F_h \geq (\sqrt{F} + h\sqrt{F_0})^2 + h \cdot c \cdot J^2; \quad c = \frac{\pi R}{2D^2(D+2R)},$$

$$J = \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \sqrt{s(x)Cs(x)} dx,$$

worin  $s(x)$  die Länge des Durchschnitts der  $y$ -Parallelen zu der Abszisse  $x$  mit  $\mathfrak{F}$ ,  $Cs(x)$  die wie oben verstandene Komplementärmenge bezeichnen. Der Beweis wird zunächst für Gebiete, die aus quadratischen Kästchen zusammengesetzt sind, erbracht; für die Übertragung auf allgemeine meßbare Gebiete wird ein (mit Beweis versehener) Satz von F. Behrend herangezogen, demzufolge die zu einer beschränkten Menge  $M$  gebildete Menge  $M + \varepsilon \mathfrak{F}_0$ ,  $\varepsilon > 0$ , Jordan-meßbar ist. Der analytische Teil des Beweises verwendet den geläufigen Induktionsschluß [vgl. z. B. Kneser und Süß, Mat. Tidsskr. (B) 1932, 19—25; dies. Zbl. 4, 130], der durch Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel eine wesentliche Abkürzung erfährt. Ist dann  $\mathfrak{F}$  das von einer streckbaren Kurve  $\Gamma$  der Länge  $L$  begrenzte Gebiet, so folgt aus (1) zufolge der Minkowskischen Längendefinition für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die verschärfte isoperi-



metrische Ungleichung

$$(2) \quad L \geq 2\sqrt{\pi F} + \frac{\pi}{2D^2(D+2)} J^2;$$

soll hiernach  $L^2 - 4\pi F = 0$  sein, so ist fast überall  $Cs(x) = 0$ , also  $\Gamma$  konvex und, unter nochmaliger Benutzung des Minkowskischen Gedankenganges, ein Kreis. (2) eignet sich auch zu folgender Verschärfung einer Ungleichung von Crone und Frobenius:

$$Ld \geq F + \pi d^2 + \frac{4\pi d}{(L + 4d)L^2} J^2,$$

worin  $2d$  die Breite von  $\Gamma$  in einer Richtung bedeutet. — Der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft im  $R_n$  verläuft grundsätzlich in der gleichen Linie; der Beweis der Brunn-Minkowskischen Ungleichung ist wieder durch die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel erheblich vereinfacht. *Harald Geppert.*

**Birkhoff, George D.:** On drawings composed of uniform straight lines. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 19, 221—236 (1940).

In der originellen Arbeit befaßt sich Verf. mit ebenen „Skizzen“, die ausschließlich durch Ziehen gerader Linien entstehen. Sie werden durch Dichtefunktionen  $f(s, \varphi)$  charakterisiert, wo  $f$  die Dichte der Geraden einer Skizze der Richtung  $\varphi$  (bezogen auf eine feste Nullrichtung) im Abstand  $s$  vom Ursprung bezeichnet. Ist  $F(r, \theta)$  die Dichte der sich im Punkt mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\theta$  (bezogen auf die gleiche Nullrichtung und den gleichen Ursprung wie oben) treffenden Geraden der Skizze, so besteht die Funktionalgleichung

$$(1) \quad F(r, \theta) = \int_0^{2\pi} f(r \sin[\varphi - \theta], \varphi) d\varphi.$$

Die Dichtefunktion  $F$  ist die Bildintensität im betreffenden Punkt der Skizze (Dichte der Verteilung der Tinte bei Federzeichnung) und bestimmt im wesentlichen das erzeugte Bild (vgl. das in Abb. 3 der Originalarbeit dargestellte Gesicht!). Die Frage, ob und wie ein durch eine Intensitätsverteilung in der Ebene vorgegebenes Bild durch eine Skizze mit geraden Linien zustande kommen kann, führt zum Problem der Auflösung der Funktionalgleichung (1) nach  $f$ . Die Durchführung dieser Auflösung bildet den wesentlichen Teil der Arbeit. Besondere Beachtung verdient der kreissymmetrische Fall, wo (1) in die Abelsche Integralgleichung

$$(2) \quad F(r) = 4 \int_0^r \frac{f(s) ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

übergeht. Unter einer speziellen Voraussetzung gelingt die Darstellung der Lösung  $f$  der allgemeinen Gleichung (1) durch eine Fouriersche Reihenentwicklung. Einige unbedeutende Druckfehler. *H. Hadwiger (Bern).*

### Topologie:

**Wallace, A. D.:** Quasi-monotone transformations. *Duke math. J.* 7, 136—145 (1940).

Bezeichne  $A$  ein lokal-zusammenhängendes Kontinuum und  $T(A) = B$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$ .  $T$  heißt eine innere Abbildung, wenn die Bilder der offenen Teilmengen von  $A$  offen sind. Ferner heißt  $T$  monoton, wenn die Urbilder zusammenhängender Teile von  $B$  zusammenhängend sind; quasi-monoton, wenn für jeden Teil  $H$  von  $B$  mit nicht leerem offenen Kern alle Komponenten von  $T^{-1}(H)$  auf die ganze Menge  $H$  abgebildet werden; licht, wenn die Urbildmenge jedes Punktes  $p$  von  $B$  zusammenhangslos ist. Es wird gezeigt, daß die inneren, oder die monotonen Abbildungen quasi-monoton sind. Umgekehrt gilt nur, daß ein quasi-monotones und lichtiges  $T$  eine innere Abbildung ist. Ferner wird die Invarianz der folgenden Eigenschaften von  $A$  gegenüber quasi-monotonen Abbildungen bewiesen: 1. eine reguläre oder rationale Kurve zu sein, 2. unikhärent zu sein. Ist  $T$  eine monotone und innere



Abbildung, so ist das Bild einer erblichen Bogensumme ebenfalls eine erbliche Bogensumme, wobei erbliche Bogensumme ein Kontinuum bedeutet, dessen sämtliche Teilkontinua Summen abzählbar vieler Bögen sind. *G. Alexits (Budapest).*

**Ayres, W. L.:** A note on the definition of arc-sets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 794—796 (1940).

Ist  $A$  ein mehrpunktiger Teil des Peanoschen Raumes  $P$ , so sind die folgenden sechs Eigenschaften von  $A$  äquivalent: 1. Es gibt eine Menge  $H$ , so daß  $A$  alle Teilbögen von  $P$ , deren Endpunkte zu  $H$  gehören, enthält. 2.  $A$  enthält jeden Teilbogen von  $A$ , dessen Endpunkte zu  $A$  gehören. 3.  $A$  ist ein zusammenhängendes System zyklischer Elemente von  $P$ . 4.  $AC$  ist für jeden zusammenhängenden Teil  $C$  von  $P$  zusammenhängend. 5. Jeder  $A$  zwischen zweien seiner Punkte trennende Punkt trennt auch  $P$  zwischen diesen beiden Punkten. 6.  $A$  ist zusammenhängend, und für jede Komponente  $C$  von  $P - A$  besteht  $\overline{AC}$  aus einem Punkt, welcher nur dann zu  $A$  gehört, wenn  $\overline{A}$  zwei Kontinua enthält, deren Durchschnitt eben aus diesem einen Punkt besteht. *G. Alexits (Budapest).*

**Hall, Dick Wick:** On a decomposition of true cyclic elements. *Trans. Amer. Math. Soc.* **47**, 305—321 (1940).

Für das Studium der lokal zusammenhängenden Kontinuen  $K$  hat G. T. Whyburn die zyklischen Elemente  $C$  von  $K$  eingeführt (ein solches z. E. ist jeder Endpunkt von  $K$ , jeder Zerlegungspunkt [cut point] von  $K$ , jedes maximale Teilkontinuum  $C$  von  $K$  ohne Zerlegungspunkt [bez.  $C$ ]). Viele Eigenschaften von  $K$  hängen nur von den Eigenschaften der z. E.  $C$  ab. Die Erfolge dieser Theorie haben zum Studium noch feinerer Zerlegungen von  $K$  geführt. Man hat hierzu auf kombinatorischem Wege z. E. höherer Ordnung definiert. Verf. geht im Gegensatz hierzu rein mengentheoretisch vor. Es sei  $C$  ein zyklisches Kontinuum (jeder Punkt liegt auf einem topologischen Bild der Kreislinie). Es wird nun definiert: eine 2-Menge besteht aus irgendeinem, nicht in einem freien Teilbogen von  $C$  enthaltenen Punktepaar von  $C$ , welches  $C$  zerlegt; jeder Punkt einer solchen 2-Menge heißt ein 2-Punkt; zwei Punkte,  $a$  und  $b$ , heißen bikonjugiert, wenn sie nicht durch eine 2-Menge getrennt sind. Verf. nennt nun eine Menge  $E \subset C$  ein sekundäres Element, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: I.  $E$  besteht aus einem Punkt  $a$  von  $C$ , der nicht 2-Punkt ist, und allen zu  $a$  bikonjugierten Punkten  $b$ , von denen mindestens einer existiert (diese Definition ist von  $a$  unabhängig); II.  $E$  besteht aus einem Punkt  $a$ , der kein 2-Punkt ist und keinen bikonjugierten Punkt besitzt ( $a$  heißt dann 2-Endpunkt); III.  $E$  ist ein maximaler freier Bogen, der mindestens einen 2-Punkt enthält; IV.  $E$  ist eine 2-Menge. — Verf. beweist im ersten Teil Sätze über die Begrenzungen, Durchmesser, Durchschnitte, Komplemente solcher sekundären Elemente, welche zum Teil Sätzen über die gewöhnlichen z. E. analog sind. Im zweiten Teil werden erweiterbare und reduzierbare Eigenschaften behandelt. Im dritten Teil werden Beispiele gegeben. — In der neuen Theorie haben noch keine Analoga die Sätze von den Ketten von z. E. und von der Baumstruktur des Raumes aller z. E. eines Kontinuums  $K$ . *Nöbeling (Erlangen).*

**Youngs, J. W. T.:** Arc-spaces. *Duke math. J.* **7**, 68—84 (1940).

Zur Strukturuntersuchung lokal zusammenhängender Kontinuen  $K$  hat G. T. Whyburn den Begriff der zyklischen Elemente eingeführt (spätere Darstellung und Literatur: C. Kuratowski und G. T. Whyburn, *Fundam. Math.* **16**, 330—351 (1930)). Betrachtet man die zyklischen Elemente eines solchen  $K$  als Punkte eines „Hyper-raumes“, so hat derselbe, wie man sagt, die Struktur eines Baumes. Hierbei ist aber der Begriff des Hyperraumes noch zu definieren. Dies kann geschehen durch den Begriff des Bogenraumes. So heißt eine Menge  $R$  von Elementen, „Punkte“ genannt, wenn gewisse ihrer Teilmengen linear geordnet sind und dabei einige Axiome erfüllt sind; diese geordneten Teilmengen heißen dann „Bogen“. (Ein „Bogen“ braucht keineswegs einer Strecke homöomorph zu sein; der hier vorliegende Begriff ist weiter als der gewöhnliche. Eine Topologie mit Umgebungen, Konvergenz usw. braucht in  $R$



nicht vorzuliegen.) Insbesondere ist jedes lokal zusammenhängende Kontinuum  $K$  in bezug auf seine Bogen im üblichen Sinne ein Bogenraum. Verf. entwickelt in einem Bogenraum  $R$  eine Theorie der zyklischen Elemente, analog zur bekannten Theorie bei lokal zusammenhängenden Kontinuen. Die Menge aller zyklischen Elemente von  $R$  ist wieder ein Bogenraum  $R'$ , wenn die Mengen der zyklischen Elemente der Ketten (chains) von  $R$  als „Bogen“ von  $R'$  eingeführt werden. Dieser Hyperraum  $R'$  ist ein Baum in dem Sinne, daß je zwei Punkte von  $R'$  durch genau einen „Bogen“ verbunden sind. Der Hyperraum  $R''$  von  $R'$  ist mit  $R'$  identisch. *Nöbeling.*

**Lebesgue, Henri:** Quelques conséquences simples de la formule d'Euler. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 19, 27—43 (1940).

Seien  $e, f, k$  bzw. die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders,  $f_i$  die Anzahl der Flächen mit  $i$  Seiten,  $e_i$  diejenige der Ecken mit  $i$  Kanten, so daß  $f = \sum f_i$ ,  $e = \sum e_i$ ,  $2k = \sum i f_i = \sum i e_i$  ist; man kann dann die Eulersche Formel  $e - k + f = 2$  in den beiden Formen (1)  $\sum f_i(2 - i) + 2 \sum e_i = 4$  und (2)  $\sum e_i(2 - i) + 2 \sum f_i = 4$  schreiben. Durch lineare Kombination dieser beiden Gleichungen erhält man eine Fülle von Sätzen über das Vorkommen und die Art des Aneinanderstoßens von Elementen in Polyedern, für deren Formulierung im einzelnen wir auf die Arbeit verweisen müssen. — Zuerst werden die im Vierfarbenproblem wichtigen Polyeder betrachtet — sie haben als Ecken Dreikante, und ihre Flächen haben mindestens fünf Seiten (vom Verf. „einfache“ Polyeder genannt) — und die Sätze von Wernicke [*Math. Ann.* 58, 413—426 (1904)] und Franklin [*Amer. J. Math.* 44, 225 bis 236 (1922)] hergeleitet. Sodann wird eine vollständige Übersicht über die an die zwölf Fünfecksseiten eines einfachen Polyeders anstoßenden Flächen gegeben, indem Verf. die Winkel an jeder Ecke passend bewertet. Die Methoden lassen sich von den einfachen Polyedern auf beliebige übertragen. Neben Verschärfungen klassischer Sätze werden die einfacheren der erhaltenen Ergebnisse mitgeteilt. *J. J. Burckhardt.*

**Kerékjártó, B. de:** Sur les transformations périodiques du plan projectif. *Mat. termézet.* Ért. 59, 798—803 u. franz. Zusammenfassung 804 (1940) [Ungarisch].

Jede Transformation der Periode  $n > 2$  der projektiven Ebene in sich besitzt einen einzigen Fixpunkt; es gibt eine zu einer Geraden isotope Kurve  $\gamma$ , die durch eine Transformation der Periode  $n$  bzw.  $\frac{n}{2}$ , je nachdem  $n$  ungerade oder gerade ist, in sich übergeht; sie ist bei geradem  $n$  eindeutig bestimmt. Die Transformation ist einer periodischen Homologie homöomorph. Für  $n = 2$  gilt das Entsprechende; es gibt dann einen einzigen isolierten Fixpunkt, während die anderen eine einfache geschlossene, einer Geraden isotope Kurve erfüllen, und die Transformation ist einer harmonischen Homologie homöomorph. — Nach Auszug. *Harald Geppert* (Berlin).

**Morse, Marston:** Rank and span in functional topology. *Ann. of Math.*, II. s. 41, 419—454 (1940).

In der Variationsrechnung im Großen bringt man die kritischen Werte (absolute und relative Minima, Minimaxwerte usw.) von Funktionen, die auf metrischen Räumen  $M$  definiert sind, in Zusammenhang mit relativen Zykeln in  $M$  (im Sinne der kombinatorischen Topologie) verschiedener Dimensionen 0, 1, ... und unterscheidet dementsprechend kritische 0-Werte, 1-Werte usw. Es sei  $m_k$  die Anzahl der geeignet zu zählenden kritischen  $k$ -Werte. Die Theorie sucht die Zahlen  $m_k$  in Verbindung zu bringen mit den Zusammenhangszahlen  $p_k$  von  $M$  (Maximalzahl homolog-unabhängiger  $k$ -Zykel in  $M$ ). Eine ganz wesentliche Schwierigkeit besteht darin, daß (auch in naheliegenden Beispielen) die  $k$ -ten Typenzahlen  $m_k$  unendlich werden können, selbst wenn die  $p_k$  endlich sind (in allen praktisch bisher wichtigen Fällen sind die  $p_k$  endlich). In der bisherigen Theorie hat man sich geholfen, indem man zunächst eine der folgenden, die Allgemeinheit stark einschränkenden Annahmen machte: die kritischen Werte häufen sich höchstens bei  $+\infty$ ; das Problem ist analytisch gegeben; die kritischen Punkte sind isoliert; die kritischen Werte sind wohlgeordnet — und dann



einen Grenzübergang zu größerer Allgemeinheit zu machen versuchte, was in gewissen Fällen möglich ist. — Verf. entwickelt nun eine völlig neue Methode, welche die Schwierigkeit  $m_k = \infty$  bewältigt, ohne einschränkende Annahmen zu benötigen. Die Grundidee besteht darin, für jedes  $k$  an Stelle der Anzahl  $m_k$  aller  $k$ -Zyklen für jedes  $\varepsilon > 0$  die Anzahl  $m_k^\varepsilon$  gewisser  $k$ -Zyklen zu betrachten (die  $m_k^\varepsilon$  sind endlich, wenn die  $p_k$  endlich sind). Es werden sodann Beziehungen aufgestellt zwischen den  $m_k^\varepsilon$  und  $p_k$ , ähnlich denen zwischen  $m_k$  und  $p_k$  in den bisher behandelten, weniger allgemeinen Fällen. — Im einzelnen werden die angedeuteten Begriffe folgendermaßen definiert. Im metrischen Raum  $M$  sei eine eindeutige Funktion  $F$  mit  $0 \leq F < 1$  definiert. Die Teilmenge von  $M$ , auf welcher  $F \leq c$  gilt, heiße  $F_c$  ( $c$  beliebige Konstante). Es werden folgende 3 allgemeinen Voraussetzungen gemacht: 1. für jedes  $c < 1$  ist  $F_c$  kompakt; 2.  $M$  ist lokal  $F$ -zusammenhängend von jeder Ordnung  $r$  in jedem Punkt  $p$  [d. h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$  derart, daß jedes stetige Bild einer  $r$ -Sphäre, die im Durchschnitt von  $F_{c+\delta}$  mit der  $\delta$ -Umgebung von  $p$  liegt, fortgesetzt werden kann zu einem stetigen Bild  $\subset F_{c+\varepsilon}$  der ganzen  $(r+1)$ -Kugel, deren „Oberfläche“ die  $r$ -Sphäre ist]; 3. es seien  $a$  und  $b$  zwei Konstante mit  $a < b < 1$ ; dann existiert in jeder Homologiekategorie  $\text{mod } F_b$  in  $M$  ein Zyklus  $\text{mod } F_b$  in einem  $F_c$  mit  $c < 1$ ; jeder Zyklus  $\text{mod } F_a$  in  $F_b$ , welcher homolog 0 ( $\sim 0$ ) ist  $\text{mod } F_a$  in  $M$ , ist auch  $\sim 0 \text{ mod } F_a$  in einem  $F_c$  mit  $c < 1$ . [Alle Zyklen im Sinne von Vietoris, Math. Ann. 97 (1927).] Ein absoluter  $k$ -Zykel  $u$ , welcher für zwei geeignete Zahlen  $c < 1$  und  $\varepsilon > 0$  in  $F_{c-\varepsilon}$  liegt und  $\not\sim 0$  ist in  $F_{c-\delta}$  für jedes  $\delta > 0$ , heißt ein  $F$ -Zykel und  $c$  eine Homologieschranke von  $u$ . Das Supremum  $s = s(u)$  der Homologieschranken  $c$  von  $u$  heißt der obere Zykelgrenzwert (superior cycle limit); falls  $u \not\sim 0$  ist in  $M$ , wird  $s = \infty$  gesetzt. Das Infimum  $t = t(u)$  der Zahlen  $b < s(u)$ , für welche  $u \sim 0$  ist  $\text{mod } F_b$  in  $F_{s-\varepsilon}$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ , heißt der untere Zykelgrenzwert von  $u$ . Ein  $k$ -Zykel  $\text{mod } F_{a-\varepsilon}$  in  $F_a$ , der  $\sim 0 \text{ mod } F_{a-\delta}$  in  $F_a$  für kein  $\delta > 0$ , heißt eine  $k$ -Kappe mit der Kappenhöhe  $a = a(u)$ ; das Supremum  $\sigma = \sigma(u)$  aller Zahlen  $b \geq a$  derart, daß  $u \not\sim 0 \text{ mod } F_{a-\varepsilon}$  in  $F_b$  für jedes hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$ , heißt der obere Kappengrenzwert von  $u$ . Eine  $k$ -Kappe  $u$  der Höhe  $a$  heißt ergänzbar (linkable), wenn ihr Rand  $\beta u \sim 0$  ist in  $F_{a-\varepsilon}$  für jedes hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$ ; ist  $u$  nicht ergänzbar, so heißt der untere Zykelgrenzwert von  $\beta u$  der untere Kappengrenzwert  $\tau(u)$  von  $u$ . Als Kappenspanne  $S(u)$  der  $k$ -Kappe  $u$  mit der Höhe  $a(u)$  wird bezeichnet die Differenz  $\sigma(u) - a(u)$ , wenn  $u$  ergänzbar, die Differenz  $a(u) - \tau(u)$ , wenn  $u$  nicht ergänzbar ist. Für jedes  $a$  und jedes  $\varepsilon > 0$  sei die Dimension einer maximalen Gruppe von  $k$ -Kappen mit der Höhe  $a$  und Spannen  $> \varepsilon$  mit  $m_k^\varepsilon(a)$  bezeichnet und die  $k$ -te  $\varepsilon$ -Typenzahl von  $a$  genannt; die Zahl  $m_k^\varepsilon = \sum_a m_k^\varepsilon(a)$  heißt die  $k$ -te  $\varepsilon$ -Typenzahl-Summe.

Schließlich sei  $n_k^\varepsilon$  die Dimension einer maximalen Gruppe nicht ergänzbarer  $k$ -Kappen mit endlichen Spannen  $> \varepsilon$ . Der Hauptsatz der Arbeit lautet nun:  $m_k^\varepsilon = n_k^\varepsilon + n_{k+1}^\varepsilon + p_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) für jedes  $\varepsilon > 0$ . Dieser Satz ist nicht nur allgemeiner, sondern auch schärfer als der analoge Satz in der bisherigen Theorie. — Zur Erläuterung des Titels der Arbeit sei noch folgendes erwähnt. Die Funktionen  $s(u)$ ,  $(s(u), t(u))$ ,  $a(u)$  sind Rangfunktionen in folgendem Sinne. Es sei  $G$  eine additive, Abelsche Operatorgruppe und  $[q]$  eine einfach geordnete Menge irgendwelcher Elemente  $q$ . Gewissen Elementen  $u$  von  $G$  sei ein Element  $q(u)$  als „Rang“ zugeordnet; zumindest dem Nullelement von  $G$  sei kein Rang zugeordnet. Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt: I. hat  $u$  einen Rang  $q(u)$  und ist der Operator  $\delta \neq 0$ , so ist  $q(u) = q(\delta u)$ ; II. haben  $u, v, u+v$  Ränge, so ist  $q(u+v) \leq \text{Max}(q(u), q(v))$ ; III. haben  $u$  und  $v$  verschiedene Ränge, so hat  $u+v$  einen Rang; IV. sind  $u$  und  $v$  Elemente von  $G(q, \omega)$  ohne Ränge, so kann nicht  $q(u+v)$  existieren und  $= \omega$  sein.  $[G(q, \omega)]$  ist die Untergruppe von  $G$ , die erzeugt wird durch die Elemente von  $G$  mit Rängen  $\leq \omega$ . — Die 3 ersten Paragraphen der Arbeit bestehen in einer rein gruppentheoretischen Untersuchung dieses Rangbegriffes.

Nöbeling (Erlangen).